



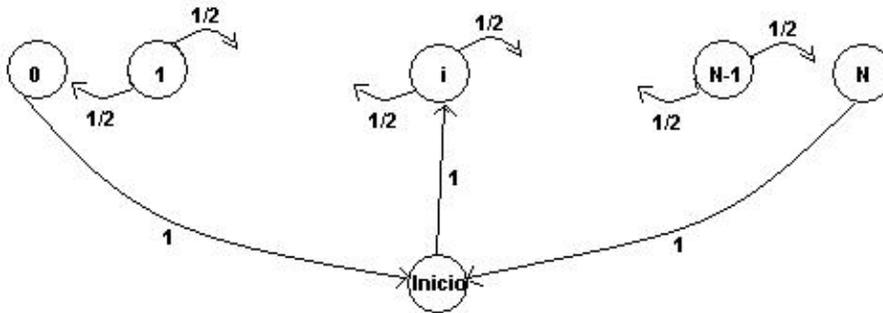
Solución Clase Auxiliar 9

Preparación Control 2
3 de Octubre de 2007

Problema 1

1. Existen varias formas de abordar el problema. Se expone una a continuación.

A la cadena original del juego de la ruina agregamos un estado *Inicio* tal que con probabilidad 1 desde este estado se pase al estado *i* y que desde los nodos terminales 0 y *N* con probabilidad 1 se pase a *Inicio*. Luego, todos los estados de la nueva cadena conforman una única clase recurrente y positiva.



Sea m_i el número esperado de períodos que la cadena pasa en el estado *i* antes de retornar a *Inicio*. Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_0 = \frac{1}{2}m_1$$

$$m_1 = \frac{1}{2}m_2$$

$$m_2 = \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_3$$

...

$$m_i = 1 + \frac{1}{2}m_{i-1} + \frac{1}{2}m_{i+1}$$

...

$$m_{N-2} = \frac{1}{2}m_{N-3} + \frac{1}{2}m_{N-1}$$

$$m_{N-1} = \frac{1}{2}m_{N-2}$$

$$m_N = \frac{1}{2}m_{N-1}$$

Con un poco de desarrollo, se puede llegar a que:

$$m_j = 2jm_0 \quad \forall 1 \leq j \leq i$$

$$m_j = 2(N-j)m_N \quad \forall i \leq j \leq N-1$$

Pero además, notar que $m_0 + m_N = 1$, pues se pasa exactamente 1 vez por alguno de los estados 0 ó N una vez que se sale de *Inicio* y se regresa a *Inicio*. De esta ecuación y de las dos anteriores evaluadas para $j = i$, se concluye que:

$$m_0 = \frac{N-i}{N}$$

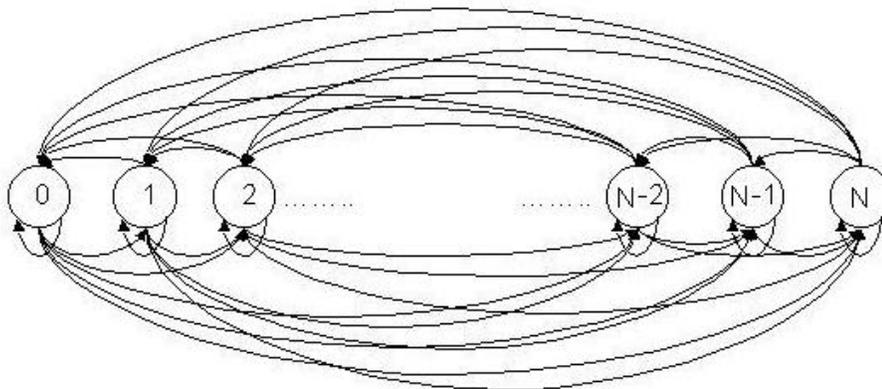
$$m_N = \frac{i}{N}$$

(resultado que también era obtenible considerando la probabilidad de ganar o perder).

Por último, calculamos el resultado que buscamos:

$$E(\text{Apuestas}) = \sum_{j=1}^{N-1} m_j = \sum_{j=1}^i 2jm_0 + \sum_{j=i+1}^{N-1} 2(N-j)m_N = 2m_0 \frac{i(i+1)}{2} + 2m_N \frac{(N-i-1)(N-i)}{2} = i(N-i)$$

2. Definimos el estado i como aquél en que hay i trabajos en el centro al inicio del día, $i \in \{0, 1, \dots, N\}$.



- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de trabajos que se terminan. Entonces, para $j \neq N$:

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i P(i, j | \text{Se terminan } k \text{ trabajos}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo;

$$P(i, j | \text{Se terminan } k \text{ trabajos}) = P(\text{lleguen } j - i + k \text{ trabajos})$$

siempre y cuando $j - i + k \geq 0$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen } j - i + k \text{ trabajos}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i \frac{\lambda^{j-i+k} e^{-\lambda}}{(j-i+k)!} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- De la misma forma, si $j = N$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i P(\text{lleguen al menos } N - i + k \text{ trabajos}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i \left(\sum_{z=N-i+k}^{\infty} \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!} \right) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

La cadena es finita, todos los estados pertenecen a una misma clase, recurrente y aperiódica, por lo que existirán probabilidades estacionarias.

- De resultados de renovación aplicados a cadenas de Markov, sabemos que $\mu_{ii} \rightarrow \frac{1}{\pi_i}$. Como en este caso se nos dice que $\mu_{ii} = \mu \quad \forall i$, podemos concluir en base al postulado de *Fenix Rolland* que las probabilidades estacionarias debieran ser iguales. Como son $N + 1$ estados en la cadena, se tiene que $\pi_i = \frac{1}{N+1} \quad \forall i$. Luego, se esperaría que:

$$\mu = N + 1$$

Para probar la veracidad o falsedad del postulado, se podría probar si $(\frac{1}{N+1}, \dots, \frac{1}{N+1})$ cumple con $\Pi^t = \Pi^t \cdot P$ (lo que equivale a probar que la matriz de probabilidades de transición sea doblemente estocástica).

Luego, la relación entre λ y p para que sean consistentes con el postulado de *Fenix Rolland* es tal que:

$$1 = \sum_{j=0}^N P(j, i) \quad \forall i$$

(en que los $P(j, i)$ han sido definidos en la parte anterior). Hasta aquí es suficiente para efectos de corrección. Notar que se puede llegar a una relación explícita entre λ y p , por ejemplo desde la ecuación para $i = 0$.

$$1 = \sum_{j=0}^N e^{-\lambda} p^j$$

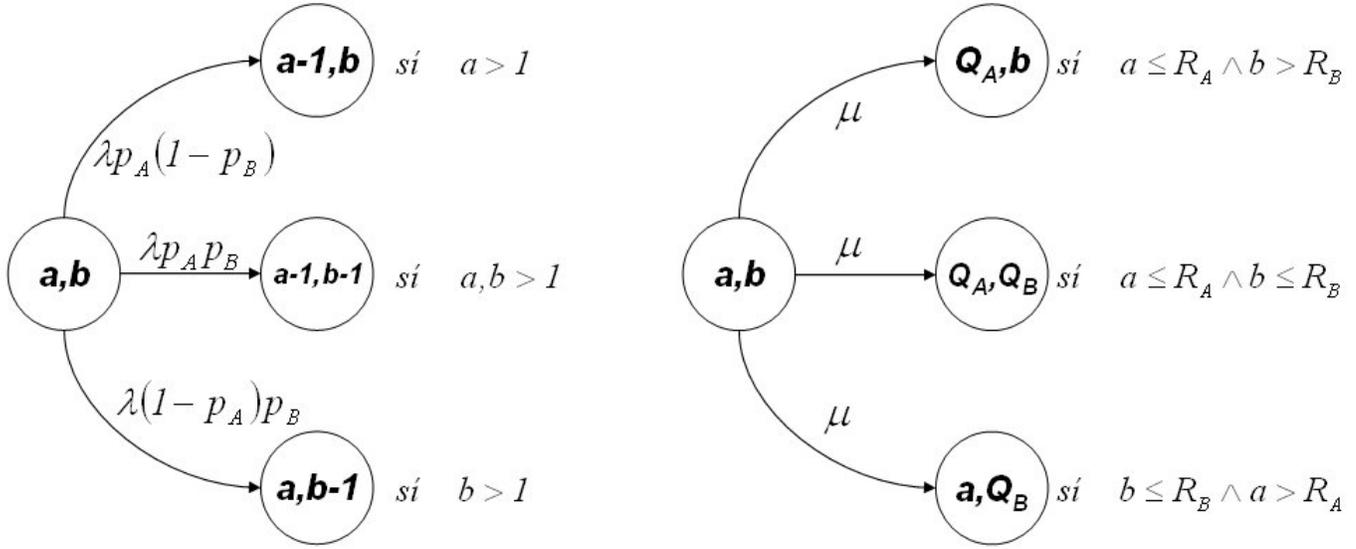
$$\lambda = -\ln\left(\frac{1}{\sum_{j=0}^N p^j}\right) = \ln\left(\frac{1-p^{N+1}}{1-p}\right)$$

Pero para las otras ecuaciones las expresiones que quedan son difíciles de despejar explícitamente y, de hecho, las conclusiones obtenidas sobre el comportamiento en el largo plazo en base a lo que postula *Fenix Rolland*, no conducen a una solución para el sistema que debieran resolver las probabilidades estacionarias y, por lo tanto, está equivocado.

Problema 2

- Los estados de la cadena deben incluir información sobre el stock de los dos Tipos de producto, de esta forma, el inventario de la tienda se puede modelar como:

Es necesario notar que una persona desea comprar sólo el producto *Tipo A* con probabilidad $P_A(1 - P_B)$ y sólo el producto *Tipo B* con probabilidad $P_B(1 - P_A)$. Es claro que, al partir con un inventario total de $R_A + 1 \leq Q_A$ y $R_B + 1 \leq Q_B$ unidades de productos de *Tipo A* y *B* respectivamente y junto con la política de reposición (reponer hasta Q_A y Q_B) nunca se van a sobrepasar las Q_i unidades de producto *Tipo i*. Por esta razón la cadena es finita (tiene $(Q_A + 1)(Q_B + 1)$ estados). Es claro además que todos los estados están comunicados, por lo que la cadena admite probabilidades estacionarias.



Las ecuaciones que permiten calcular las probabilidades estacionarias son:

$$\begin{aligned}
\pi_{0,0}\mu &= \pi_{1,1}\lambda p_A p_B + \pi_{1,0}\lambda p_A(1-p_B) + \pi_{0,1}\lambda(1-p_A)p_B \\
\pi_{a,0}(\mu + \lambda p_A(1-p_B)) &= \pi_{a+1,1}\lambda p_A p_B + \pi_{a+1,0}\lambda p_A(1-p_B) + \pi_{a,1}\lambda(1-p_A)p_B & 1 \leq a \leq Q_A \\
\pi_{0,b}(\mu + \lambda p_B(1-p_A)) &= \pi_{1,b+1}\lambda p_A p_B + \pi_{1,b}\lambda p_A(1-p_B) + \pi_{0,b+1}\lambda(1-p_A)p_B & 1 \leq b \leq Q_B \\
\pi_{a,b}(\mu + \lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{a+1,b+1}\lambda p_A p_B + \pi_{a+1,b}\lambda p_A(1-p_B) + \pi_{a,b+1}\lambda(1-p_A)p_B & a \leq R_A \vee b \leq R_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{a+1,b+1}\lambda p_A p_B + \pi_{a+1,b}\lambda p_A(1-p_B) + \pi_{a,b+1}\lambda(1-p_A)p_B & a > R_A \wedge b > R_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{Q_A,b+1}\lambda p_B(1-p_A) + \sum_{k=0}^{R_A} \pi_{k,b}\mu & a = Q_A, b > R_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{Q_A,b+1}\lambda p_B(1-p_A) & a = Q_A, b \leq R_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{a+1,Q_B}\lambda p_A(1-p_B) + \sum_{k=0}^{R_B} \pi_{a,k}\mu & a > R_A, b = Q_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \pi_{a+1,Q_B}\lambda p_A(1-p_B) & a \leq R_A, b = Q_B \\
\pi_{a,b}(\lambda(1-(1-p_B)(1-p_A))) &= \sum_{a=0}^{R_A} \sum_{b=0}^{R_B} \pi_{a,b}\mu + \sum_{k=0}^{R_B} \pi_{Q_A,k}\mu + \sum_{k=0}^{R_A} \pi_{k,Q_B}\mu & a = Q_A \wedge b = Q_B \\
1 &= \sum_{a=0}^{Q_A} \sum_{b=0}^{Q_B} \pi_{a,b}
\end{aligned}$$

2. En este caso es necesario considerar los estados en que se hacen pedidos y considerar el costo de dicho pedido (costo fijo y reposición de productos). De esta forma el valor pedido corresponde a:

$$\mu \left(\sum_{a=0}^{R_A} \sum_{b=0}^{R_B} [C_P + C_A(Q_A - a) + C_B(Q_B - b)] + \sum_{a=0}^{R_A} \sum_{b=R_B+1}^{Q_B} [C_P + C_A(Q_A - a)] + \sum_{a=R_A+1}^{Q_A} \sum_{b=0}^{R_B} [C_P + C_B(Q_B - b)] \right)$$

3. En este caso se deben identificar, para cada Tipo de producto, los estados en que es posible venderlos (existencia en stock) y las tasas efectivas de venta. En este último punto es importante notar que la inexistencia de producto *Tipo B* en inventario reduce la tasa de clientes que comprarán el producto *Tipo A* ya que si alguien quiere comprar los dos tipos y falta *B* entonces tampoco comprará *A*.

De esta forma:

$$E[\text{Ventas Tipo A}] = \sum_{a=1}^{Q_A} \lambda p_A (1 - p_B) \pi_{a,0} + \sum_{a=1}^{Q_A} \sum_{b=1}^{Q_B} \lambda p_A \pi_{a,b}$$

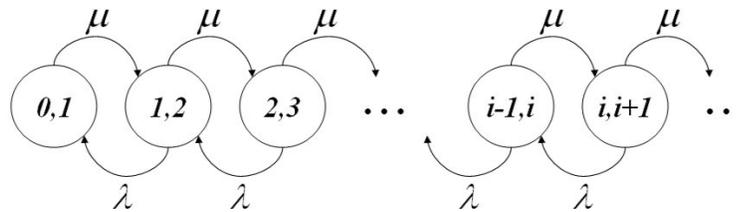
$$E[\text{Ventas Tipo B}] = \sum_{b=1}^{Q_B} \lambda p_B (1 - p_A) \pi_{0,b} + \sum_{a=1}^{Q_A} \sum_{b=1}^{Q_B} \lambda p_B \pi_{a,b}$$

4. En esta parte sólo es necesario identificar el nivel de inventario de cada producto en cada estado, así:

$$E[\text{Inventario Tipo A}] = \sum_{a=0}^{Q_A} \sum_{b=0}^{Q_B} a \pi_{a,b}$$

$$E[\text{Inventario Tipo B}] = \sum_{a=0}^{Q_A} \sum_{b=0}^{Q_B} b \pi_{a,b}$$

El inventario en esta situación puede ser modelado con la siguiente cadena (ya que los únicos cambios posibles en el inventario son aumenta en una unidad el stock de ambos producto, o se reduce en una unidad el stock de ambos producto):



Únicamente pueden salir clientes indignados de la tienda si llegan en el estado (0,1). Luego:

$$E[\text{Clientes indignados}] = \lambda \pi_{0,1}$$

Es fácil ver que:

$$\pi_{i,i+1} = \prod_{k=1}^i \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k \pi_{0,1}$$

Por lo que:

$$\pi_{0,1} + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{0,1} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^i = 1$$

$$\Rightarrow \pi_{0,1} = 1 - \frac{\mu}{\lambda}$$

Problema 3

Para simplificar la notación, definimos $\alpha_{k,n}$ a la probabilidad de que si llega un avión de Armijo United y hay n personas en el aeropuerto k de ellas quieran abordarlo. Dado que si llega un avión de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p , o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $(1 - p)$, se tiene que:

$$\alpha_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

Además es útil definir $\alpha_{k,n}^+$ como sigue:

$$\alpha_{k,n}^+ = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

1. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

- Para modelar la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:

Caso 1: $i = 0$

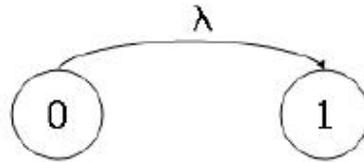


Figura 1: Caso 1

Caso 2: $i \leq R, 0 \leq j \leq i$.

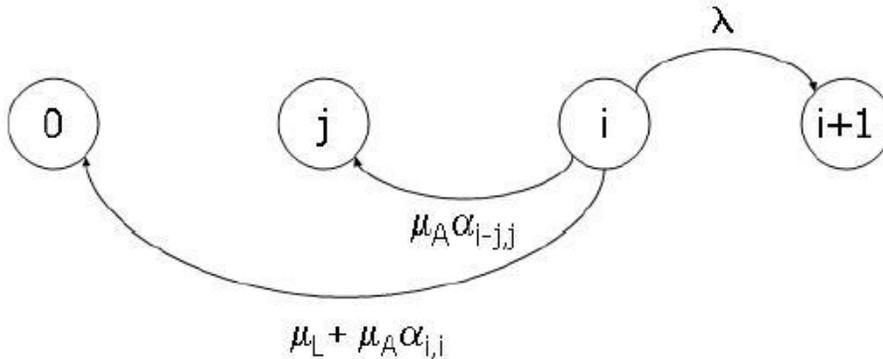


Figura 2: Caso 2

Caso 3: $i > R, i - R < j \leq i$.

- Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico $i > R$. Para un estado de este tipo se tienen las siguientes tasas de muerte:
 - Si llega un avión de L.A Airlines lo abordarán con toda seguridad los primeros R pasajeros de la fila de espera.

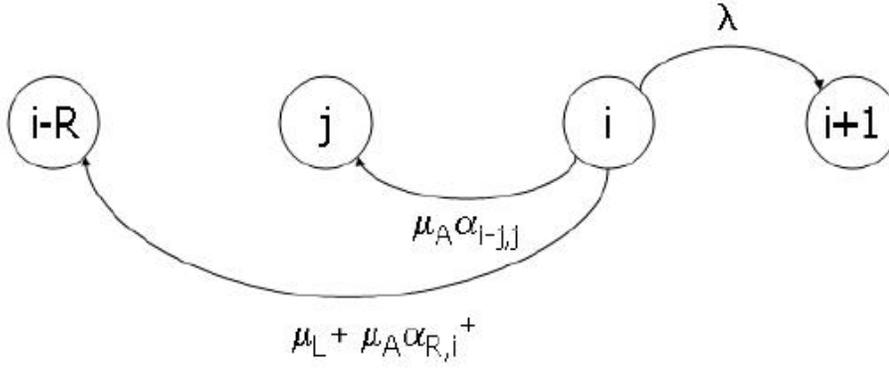


Figura 3: Caso 3

- Si llega un avión de Armijo United y más de R personas quieren abordarlo (con probabilidad $\alpha_{R,i}^+$), sólo R de ellos podrán hacerlo.
- Si llega un avión de Armijo United, $(i - j)$ pasajeros abordarán el vuelo con probabilidad $\alpha_{i-j,i}$ para $i - R + 1 \leq j \leq i - 1$.

Por otro lado cuando llega un nuevo pasajero al terminal aéreo la cantidad de personas en la fila aumenta en uno.

Luego la condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

$$\lambda \leq \frac{\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i}^+}{R} + \sum_{j=i-R+1}^{i-1} \frac{\mu_A \alpha_{i-j,i}}{(i-j)}$$

- El sistema de ecuaciones que permite calcular las probabilidades estacionarias se define en función de los 3 casos detallados anteriormente:

Caso 1: $i = 0$

$$\Pi_0 \lambda = \sum_{i=1}^R \Pi_i (\mu_A \alpha_{i,i} + \mu_L)$$

Caso 2: $i \leq R, 0 \leq j \leq i$.

$$\Pi_i (\lambda + \mu_L + \mu_A \alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1} \mu_A \alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1} \lambda + \Pi_{i+R} (\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i+R}^+) + \sum_{k=i+1}^{R+1-i} \Pi_k \mu_A \alpha_{k-i,i}$$

Caso 3: $i > R, i - R < j \leq i$.

$$\Pi_i (\lambda + \mu_L + \mu_A \alpha_{R,i}^+ + \sum_{k=i-R+1}^{i-1} \mu_A \alpha_{i-k,i}) = \Pi_{i-1} \lambda + \Pi_{i+R} (\mu_L + \mu_A \alpha_{R,i+R}^+) + \sum_{k=i+1}^{R+1-i} \Pi_k \mu_A \alpha_{k-i,i}$$

A este sistema sólo resta la clásica ecuación: $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1$.

2. Para un pasajero que está en el lugar i -ésimo con $i \leq R$, el trade-off consiste en subirse al avión de Armijo United que es más lento o esperar el próximo avión de L.A. Airlines, pero que es más rápido pero puede tardar en llegar. Por otro lado, para un pasajero en el lugar i -ésimo con $i > R$ el trade-off es similar pero en lugar de esperar el próximo avión de L.A Airlines debe esperar $k + 1$ aviones de esta aerolínea con $k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$.
3. Para $i \leq R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L} + \tau_L$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Para $i > R$, la política óptima es tomar el avión de Armijo United si:

$$\tau_A < \frac{1}{\mu_L}(k+1) + \tau_L \quad \text{donde } k = \lfloor \frac{i}{R} \rfloor$$

y esperar el avión de L.A. Airlines en caso contrario.

Francisco Uribe
fruribe@dcc.uchile.cl