Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Mario Guajardo, Daniel Yung

Clase Auxiliar 1
2 de Agosto de 2006

Problema 1

1. Demuestre que la distribución de probabilidad exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

2. Demuestre que si
   $T_1 \longrightarrow exp(\lambda)$
   $T_2 \longrightarrow exp(\mu)$, se tiene que:
$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

3. Sean X_1, X_2, X_3....X_n Variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:
   $X \longrightarrow min(X_1, X_2, X_3, \ldots X_n)$

4. Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de 2 variables aleatorias que siguen distribuciones de Poisson independientes.

Problema 2

1. Usted se encuentra dando una prueba de su ramo preferido el cual está siendo cuidado por dos ayudantes. El primer ayudante dice la verdad 3/4 de las veces. Por su parte el segundo de los ayudantes dice la verdad 4/5 de las veces. La pregunta a una pregunta particular tiene 9 alternativas, y usted no sabe cuál es la respuesta correcta (pero los ayudantes sí la conocen). Por esto, usted ha decidido preguntarle a los 2 ayudantes su opinión respecto a la alternativa correcta.

   Si ambos afirman que la alternativa correcta es la (d), ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente esa sea la respuesta correcta a la pregunta (es decir, que ambos ayudantes estén diciendo la verdad)?.

   Hint: La probabilidad a priori que cualquiera de las alternativas sea la correcta es 1/9

Problema 3

Suponga que el dueño de un centro de dental quiere definir la política de citaciones de pacientes. Cada dentista puede atender 2 pacientes en el período en estudio. El primer paciente se cita al comienzo de la sesión ($t_1 = 0$) y el segundo se cita en el instante $t_2 = x$. Se ha observado que todos los pacientes son puntuales.

Los tiempos de cada atención son variables aleatorias iid con distribuciones Uniformes entre a y b [hrs]. Así, cuando el segundo paciente llega al centro dental existen dos posibilidades:

- El dentista está ocupado atendiendo al primer paciente. En este caso, el segundo cliente debe esperar hasta que termine la atención del primero para ser atendido.
- El dentista está ocioso, ya que terminó de atender al primer paciente. El segundo cliente se atiende de inmediato.

El dentista cobra $M[\$/hr]$ independientemente si está trabajando o no, por lo que a Ud. le interesa que este se desocupe en el menor tiempo posible de la atención de los 2 pacientes. Sin embargo, si un paciente llega y su dentista está ocupado el centro percibe un costo de $P[\$/hr]$ mientras éste espera.

Se quiere buscar cuál es el instante x óptimo para citar al 2° paciente si el tomador de decisiones es neutral al riesgo. Para ello conteste las siguientes preguntas.

a) Si el segundo paciente es citado en el instante x y por lo tanto llega al sistema en el instante x (recuerde que es puntual), ¿Cuál es la probabilidad que encuentre al dentista ocupado atendiendo al primer paciente y por lo tanto tenga que esperar para recibir su atención?.

b) Si al llegar a la consulta, el segundo cliente encuentra al dentista ocupado, ¿Cuál es la esperanza del tiempo que tendrá que esperar hasta comenzar a ser atendido?. ¿Cuál es la esperanza si lo encuentra desocupado?. Entonces, si el segundo cliente llega a la consulta en el instante x, ¿Cuál es la esperanza del tiempo de espera ?.

c) ¿Cuál es la esperanza del tiempo que el dentista estará en el centro dental?.

d) Utilizando las partes anteriores, defina el problema de optimización que debe resolver el dueño de la consulta. Encuentre el momento óptimo para citar al segundo paciente.

Problema 4 (Ross 2.17)

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes continuas de densidad común f. Sea $X_{(i)}$ el i-ésimo menor valor entre $X_1, X_2, ..., X_n$.

a) Demuestre que la densidad de $X_{(i)}$ está dada por:

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(x)^{i-1} \overline{F}(x)^{n-i} f(x)$$

b) $X_{(i)}$ será menor que x si, y sólo si, cuántas de las variables X son menores que x?

c) Use (2) para obtener una expresión para $P[X_{(i)} \leq x]$.

d) Utilice (1) y (3) para establecer la siguiente identidad para $0 \leq y \leq 1$:

$$\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} y^k (1-y)^{(n-k)} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} dx$$

Problema 5

a) Pasajeros llegan a un estación de Metro según un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. El tiempo entre los arribos de los trenes es de t [horas] y su capacidad es tal que puede llevar a todos los pasajeros esperando. Si acaba de pasar un tren y la estación está vacía:

   a) Calcule la esperanza de la suma de los tiempos de espera de los pasajeros que subirán al siguiente tren.

   b) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior si los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora]?

b) Clientes llegan a un banco como un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. Suponga que 2 clientes llegaron durante la primera hora.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros 20 minutos?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haya llegado durante los primeros 20 minutos?

Problema 6

Partiendo en $t = 0$, los buses llegan a un paradero según un proceso de poisson de tasa λ. Por su parte, lo pasajeros llegan a esperar al paradero según un proceso de poisson de tas μ. Al llegar el bus, todos los pasajeros que se encuentren esperando se suben instantáneamente a él (i.e. capacidad del bus es infinita), y los pasajeros que llegan posteriormente a esperar se suben al siguiente bus.

a) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que entran al m-ésimo bus, dado que el tiempo entre las llegadas del bus $m-1$ y del bus m-ésimo es t.

b) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus.

c) Dado que un bus llega a las 10:30 AM y no llegan buses entre las 10:30 y las 11:00 AM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

d) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros esperando en algún momento cualquiera del tiempo, por ejemplo, $2:30$ PM. Suponga que el proceso empezó *hace mucho* tiempo.

e) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus (que pasa después de las 2:30 PM).

f) Dado que Ud. llega a esperar el bus a las 2:30 PM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.