Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Solución Clase Auxiliar 1
Procesos de Poisson, 1 de Agosto de 2007

Problema 1

1. *a)* Sea S_i el instante de la llegada del i-ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)]$

   Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} E[\sum_{i}^{N(t)}(t-S_i)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)/N(t)=n]\cdot P[N(t)=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)} t/N(t)=n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} E[t] - E[\sum_{i=1}^{n} S_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \end{aligned}$$

   En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t]=t$. Por otro lado el vector $(S_1, S_2, ..., S_n)$ dado que N(t)=n tiene la misma distribución que el vector $(U_{(1)}, U_{(2)}, ..., U_{(n)})$, que es el orden estadístico de n variables uniformes i.i.d. en el intervalo $[0,t]$ (ver capitulo 2 sección 3, en particular ver Teorema 2.3.1). Por tanto $E[\sum_{i=1}^{n} S_i/N(t)=n] = E[\sum_{i=1}^{n} U_{(i)}] = E[\sum_{i=1}^{n} U_i] = \frac{nt}{2}$. Finalmente el término $P[N(t)=n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E[\sum_{i}^{N(t)}(t-S_i)] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[nt-\frac{nt}{2}\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

   b) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t. Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ. Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$\int_0^{\infty}\frac{\lambda t^2}{2}\mu e^{-\mu t}dt = \frac{\lambda}{\mu^2}$$

2. Sea $N(t)$ la cantidad de clientes que han llegado al banco hasta el instante t. Dado que se registraron 2 llegadas en un hora de operación, el instante de cada una de esas llegadas se distribuye Uniforme en el intervalo de una hora. Luego:

   a) $P[N(\frac{1}{3})=2/N(1)=2] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

   b) $2\cdot P[N(\frac{1}{3})=1/N(1)=2] + P[N(\frac{1}{3})=2/N(1)=2] = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Problema 2

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(verlos7primerosgoles) = P(x_2 > B, x_3 > B, ..., x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. Sea Y_i el tiempo trascurrido entre el fin de la celebración del (i-1)-ésimo gol observado y el momento en que se produce el i-ésimo gol observado. De esta manera tenemos que:

   - $Y_1 \rightarrow exp(\lambda)$
   - $Y_i \rightarrow exp(\lambda)\ \forall i \neq 1$

   Entonces sea S_N^R el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_N^R = \sum_{i=1}^{N} Y_i + (N-1)B \Rightarrow S_N^R - (N-1)B \rightarrow Gamma(N, \lambda)$$

   De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N^R \leq t) = P(R(T) \geq N)$[1] se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(N-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(N-1)!}$$

Problema 3, Ross 2.4

$E[N(t) \cdot N(t+s)] = E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] = E[N(t)(N(t+s) - N(t))] + E(N^2(t)) = E(N(t))E(N(s)) + E(N^2(t))$

Luego,

$$E[N(t) \cdot N(t+s)] = \lambda^2 st + \lambda t + \lambda^2 t^2$$

Problema 4, Ross 2.9

Ver solución en Ross, pág. 479.

Problema 5, Ross 2.11

Sea X el tiempo al que viene el próximo vehículo desde que la persona intenta cruzar la calle. Se tiene:

$E(T_{esp}) = \int_0^\infty E(T_{esp}/X = x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^T [x + E(T_{esp})]\lambda e^{-\lambda x} dx$

Despejando $E(T_{esp})$ y desarrollando las integrales se llega a que:

$$E(T_{esp}) = \frac{e^{\lambda T}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - T$$

Problema 6

Sea $N_{ij}(t)$ el número de barcos que vienen del país i y viajan hacia el país j, hasta el instante t. Por la propiedad de división de Poisson $N_{ij}(t)$ es también un Proceso de Poisson con tasa $\lambda_i P_{ij}$ y todos los $N_{ij}(t)$ son independientes. Luego, se tiene que:

$$N_j(t) = \sum_i N_{ij}(t)$$

[1] Identidad válida para cualquier proceso de conteo

Por lo propiedad de composición de Poisson la variable $N_j(t)$ es Proceso de Poisson con tasa $\sum_i \lambda_i P_{ij}$:

$$P[N_j(t) = k] = \frac{(\sum_i \lambda_i P_{ij} t)^k e^{-\sum_i \lambda_i P_{ij} t}}{k!} \qquad E[N_j(t)] = \sum_i \lambda_i P_{ij} t$$

Problema 7

Digamos que un auto es de tipo I, si estará entre los kilómetros a y b en el instante t.
Un auto que entra a la carretera en un instante s $(s < t)$ será de tipo I si su velocidad V es tal que $a < V \cdot (t-s) < b$.
Por lo tanto será de tipo 1 con probabilidad:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= P[\frac{a}{t-s} < V < \frac{b}{t-s}] \\ &= F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s}) \end{aligned}$$

Utilizando la proposición de proceso de Poisson filtrado se tiene que el número de autos entre los kilómetros a y b en el instante t es Poisson de Media:

$$\lambda t \int_0^t P_1(s) \frac{ds}{t} = \lambda \int_0^t [F(\frac{b}{t-s}) - F(\frac{a}{t-s})] ds$$