Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
P. Auxiliares : Felipe Castro, Francisco Uribe

CONTROL 3
14 de Octubre de 2007

Problema 1

Considere una fábrica de lavadoras. A ésta llegan dos tipos de trabajos: lavadoras a ensamblarse y lavadoras descompuestas. Se sabe que un fracción v de los trabajos que llegan son lavadoras a esamblarse y que la fracción restante son lavadoras descompuestas. Las lavadororas a ensamblarse entran directamente a la primera estación de la línea de ensamble y las lavadoras descompuestas ingresan al sector de reparaciones.

Las instalaciones de la fábrica se pueden subdividir en tres:

- Una **línea de ensamblaje**, la que se compone de N estaciones. En cada estación trabaja 1 operario, el que realiza una labor específica en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_1. Cada trabajo que llegue a la estación $i \in \{1, ..., N\}$, de haber un trabajo en proceso, debe esperar en la cola FIFO de tal estación, de lo contrario es inmediatamente procesado. Cada trabajo que termina de ser procesado en la estación $i \in \{1, ..., N-1\}$ avanza con probabilidad p a la estación siguiente y con $1-p$ ingresa nuevamente a la cola de la estación i. Cada trabajo que termina de ser procesado en la estación N con probabilidad $1-p$ es insertado nuevamente en la cola de tal estación y con probabilidad p avanza al sector de empaquetamiento y despacho.
- Un **sector de empaquetamiento y despacho**, el que se compone de una estación de **control de calidad** y de una de **empaquetamiento**. Los trabajos que llegan al sector de empaquetamiento y despacho primero ingresan a la estación de control de calidad, en esta estación hay dos inspectores, cada uno verifica la calidad de los electrodomésticos en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_2. Los trabajos que lleguen a esta estación deberán esperar en la cola FIFO antes de ser procesados, siempre que haya trabajos siendo controlados. Los trabajos que terminan de ser controlados avanzan a la siguiente estación (empaquetamiento) con probabilidad q y son reinsertados en la estación $j^* \in \{2, ..., N-1\}$ de la línea de ensamblaje, con probabilidad $1-q$. La estación de empaquetamiento puede ser modelada como si tuviese infinitos servidores, cada uno de ellos atendiendo en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_3. Las lavadoras empaquetadas son despachadas fuera de las instalaciones de la fábrica.
- Un **sector de reparaciones**. Por conflictos internos no se sabe la configuración interna de este sector, sólo se sabe que al igual que los otros dos sectores es una red de colas (de Jackson), en la que se tiene estado estacionario para todos sus nodos. Además se ha medido que el tiempo medio que un trabajo pasa en este sector es W y que el número promedio de trabajos por unidad de tiempo en este sector es de L. Por último considere que una fracción s de los trabajos que ingresan a este sector son despachados fuera de la fábrica, una fracción r son insertados en la estación de control de calidad y una fracción t son reinsertados en la estación j^* de la línea de ensamblaje.

1. (0.5 p) Modele la fábrica como una red de colas.
2. (1 p) Para cada una de las N estaciones de la línea de esamblaje, para la estación de control de calidad y para la estación de empaquetamiento, especifique: el tipo de sistema, las tasas efectivas de entrada y de salida y las condiciones de estacionariedad (suponga que se cumplen para las siguientes preguntas). Entregue sus resultados resumidos en una tabla.
3. (1 p) Indique el tiempo promedio que un trabajo permanece en la fábrica.
4. (1 p) Indique el tiempo promedio que un trabajo que entra directo al sector reparaciones permanece en la fábrica.

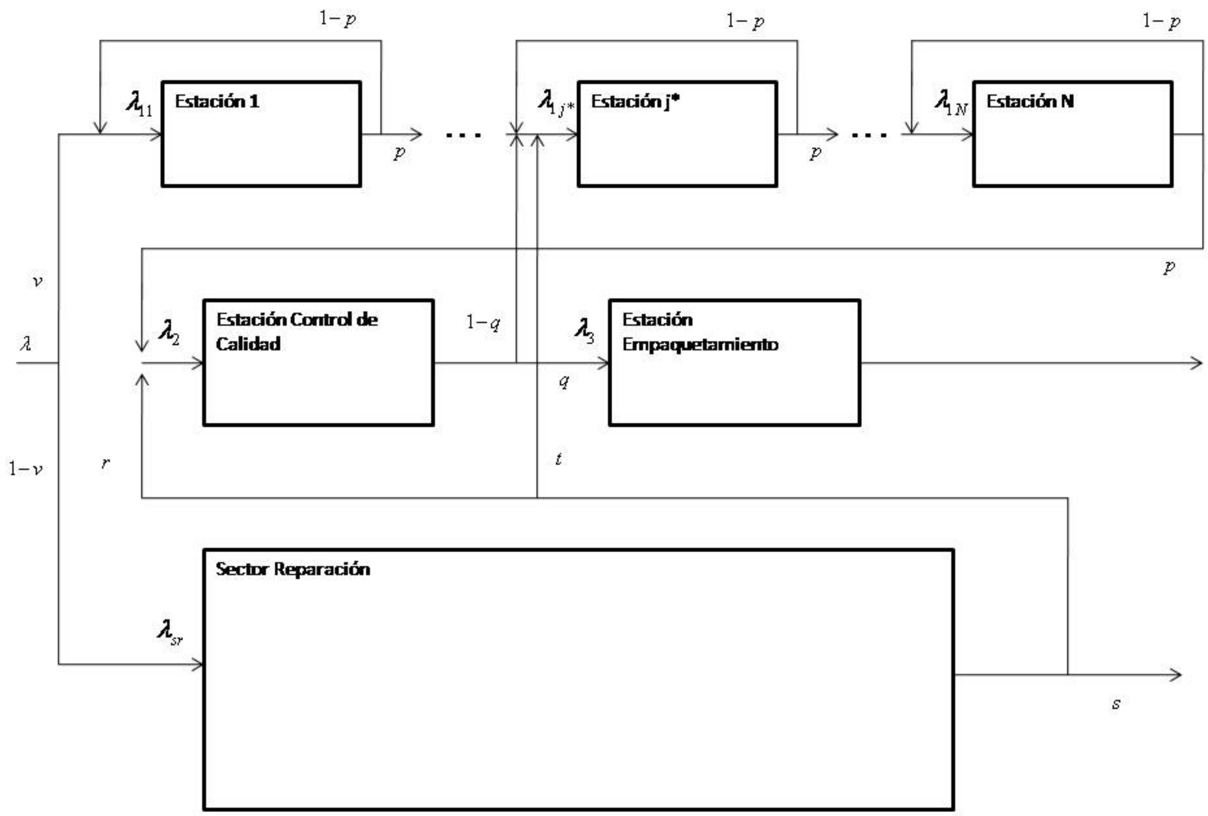
5. (1 p) ¿En cuánto cambia la varianza del número de trabajos en la fábrica cuando se duplica la tasa de atención de los servidores de la estación de empaquetamiento?

6. (0.5 p) ¿En cuánto cambia la tasa efectiva de salida de la fábrica cuando se aumenta a tres el número de servidores en la estación de empaquetamiento?

7. (1 p) Calcule la distribución de probabilidades del número de estaciones con exactamente $k \in \{0, 1, ...\}$ trabajos simultáneamente en la línea de ensamblaje.

Solución, Problema 1

1. (0.5 p) Modele la fábrica como una red de colas.



Basta con entregar un diagrama como el anterior, donde se especifiquen todas las estaciones, los arcos de probabilidad positiva entre cada par de estaciones, y las probabilidades asociadas a dichos arcos.

2. (1 p) Para cada una de las N estaciones de la línea de ensamblaje, para la estación de control de calidad y para la estación de empaquetamiento, especifique: el tipo de sistema, las tasas efectivas de entrada y de salida y las condiciones de estacionariedad (suponga que se cumplen para las siguientes preguntas). Entregue sus resultados resumidos en una tabla.

   Solución:

   Cálculo de Tasas:

   - Tasa de entrada a la fábrica: $\lambda(1-v) = \lambda_{sr}$ y de Little se tiene que $\lambda_{sr} = \frac{L}{W}$ por tanto $\lambda = \frac{L}{W(1-v)}$.

- Tasas estaciones línea de ensamblaje:
  - Caso $i = 1$, $\lambda_{11} = \lambda_{11}(1-p) + \lambda v \Leftrightarrow \lambda_{11} = \frac{v}{p}\lambda$.
  - Caso $1 < i < j^*$, $\lambda_{1i} = \lambda_{1i}(1-p) + \lambda_{1(i-1)}p \Leftrightarrow \lambda_{1i} = \lambda_{1(i-1)} \Rightarrow \lambda_{1i} = \frac{v}{p}\lambda$.
  - Caso $i = j^*$, $\lambda_{1j^*} = \lambda_{1j^*}(1-p) + \lambda_{1(j^*-1)}p + \lambda_2(1-q) + \lambda_{sr}t \Leftrightarrow \lambda_{1j^*} = \frac{\lambda v + \lambda_2(1-q) + \lambda(1-v)t}{p}$.
  - Caso $j^* < i \leq N$, $\lambda_{1i} = \lambda_{1i}(1-p) + \lambda_{1(i-1)}p \Leftrightarrow \lambda_{1i} = \lambda_{1(i-1)} \Rightarrow \lambda_{1i} = \lambda_{1j^*}$.
- Tasas estaciones sector empaquetamiento y despacho:
  - Tasa Control de Calidad, $\lambda_2 = \lambda_{sr}r + \lambda_{1N}p \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda(1-v)r + \lambda_{1j^*}p$.
  - Tasa Empaquetamiento, $\lambda_3 = \lambda_2 q \Leftrightarrow \lambda_3 = [\lambda(1-v)r + \lambda_{1j^*}p]\, q$.

Finalmente estableciendo que la tasa de entrada de la fábrica es igual a la de salida se tiene que $\lambda = \lambda_3 + \lambda_{sr}s \Leftrightarrow \lambda = \lambda_2 q + \lambda(1-v)s \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda[1-(1-v)s]}{q} \Rightarrow \lambda_{1j^*} = \lambda\frac{1-(1-v)[s+rq]}{pq}$.

Una vez despejadas las tasas, se entrega la tabla pedida:

Sistema	Tipo Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
$1i, 1 \leq i < j^*$	$M/M/1$	λ_{1i}	$\frac{v}{p}\lambda$	$\lambda_{1i} < \mu_1$
$1i, j^* \leq i \leq N$	$M/M/1$	λ_{1i}	$\lambda\frac{1-(1-v)[s+rq]}{pq}$	$\lambda_{1i} < \mu_1$
2	$M/M/2$	λ_2	$\frac{\lambda[1-(1-v)s]}{q}$	$\lambda_2 < 2\mu_2$
3	$M/M/\infty$	λ_3	$\lambda\,[1-(1-v)s]$	siempre $\exists$

3. (1 p) Indique el tiempo promedio que un trabajo permanece en la fábrica.

   Solución:

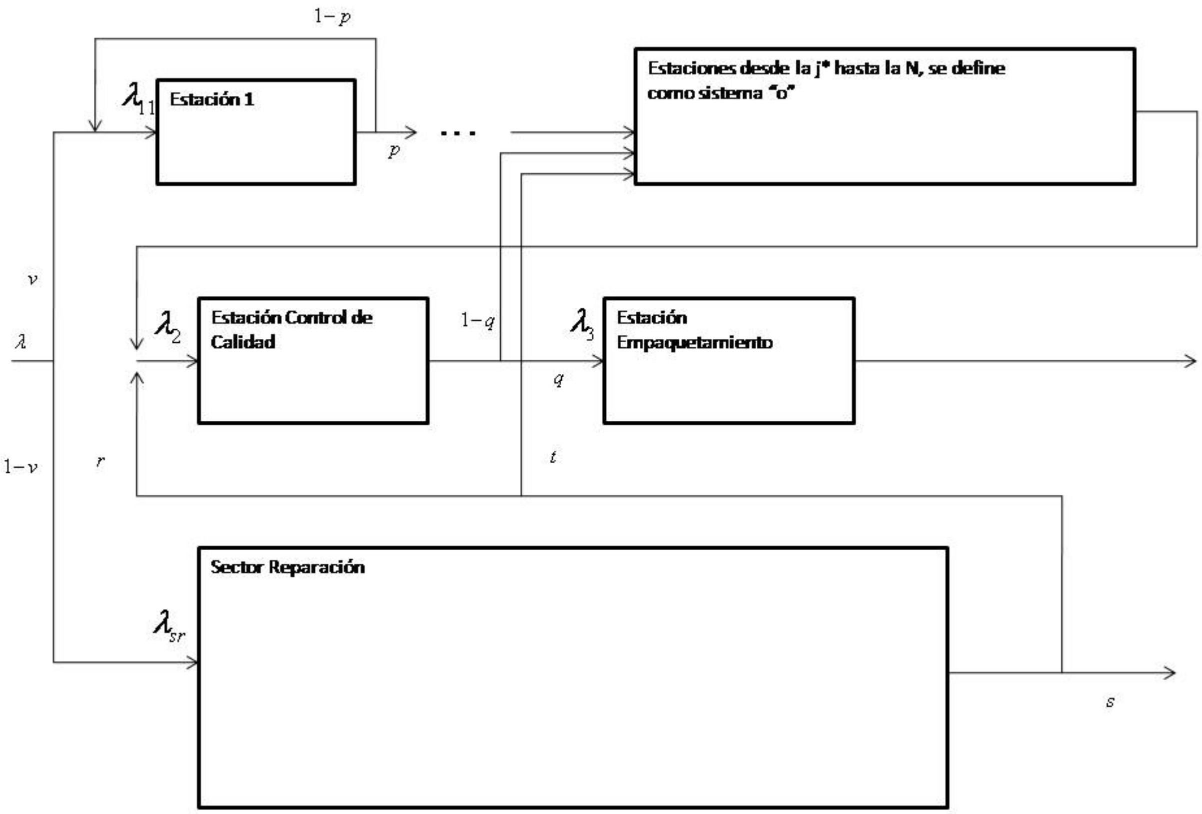
   Sea L_f el número promedio de trabajos en la fábrica por unidad de tiempo. Se tiene que el tiempo promedio que un trabajo permanece en la fábrica $W_f = \frac{L_f}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N} L_{1i} + L_2 + L_3 + L}{\lambda}$.

   Cálculo L's:

   - Línea de Ensamblaje: $1 \leq i \leq N$, $L_{1i} = \frac{\frac{\lambda_{1i}}{\mu_1}}{1-\frac{\lambda_{1i}}{\mu_1}}$.
   - Control de Calidad: $L_2 = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1-\left(\frac{\lambda_2}{2\mu_2}\right)^2}$.
   - Empaquetamiento: $L_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$

4. (1 p) Indique el tiempo promedio que un trabajo que entra directo al sector reparaciones permanece en la fábrica.

   Solución: para responder esta pregunta conviene hacer la simplificación, que se muestra en la siguiente figura.



Sea $L_o = \sum_{i=j^*}^{N} L_{1i}$.

Cálculo $W's$.

- $W_o = \frac{L_o}{p\lambda_N}$.
- $W_2 = \frac{L_2}{\lambda_2}$.
- $W_3 = \frac{L_3}{\lambda_3}$.

Además se define T_l el tiempo esperado que tarda en salir de la fábrica un trabajo desde que ingresa al sistema $l \in \{o, 2, 3, sr\}$.

- $T_o = W_o + W_2 + qW_3 + (1-q)T_o \Leftrightarrow T_o = \frac{W_o+W_2+qW_3}{q}$.
- $T_2 = W_2 + qW_3 + (1-q)T_o \Rightarrow T_2 = W_2 + qW_3 + (1-q)\frac{W_o+W_2+qW_3}{q}$.
- $T_{sr} = W + tT_o + rT_2$.

5. (1 p) ¿En cuánto cambia la varianza del número de trabajos en la fábrica cuando se duplica la tasa de atención de los servidores de la estación de empaquetamiento?

   Solución: Sea N_f el número de trabajos en la fábrica en algún instante. Se tiene que $N_f = \sum_{i=1}^{N} N_{1i} + N_2 + N_3 + N_{sr}$, como se supone que hay estado estacionario entonces se tiene que $V(N_f) = \sum_{i=1}^{N} V(N_{1i}) + V(N_2) + V(N_3) + V(N_{sr})$ por independencia de los N's (forma producto). Finalmente la respuesta es:

$$V(N_f^{final}) - V(N_f^{inicial}) = V(N_3^{final}) - V(N_3^{inicial}) = \frac{\lambda_3}{2\mu_3} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} = -\frac{\lambda_3}{2\mu_3}$$

   Donde se usa que la distribución del número de trabajos en la estación sólo cambia para la estación empaquetamiento y además que $N_3 \longrightarrow poisson(\frac{\lambda_3}{\mu_3})$.

6. (0.5 p) ¿En cuanto cambia la tasa efectiva de salida de la fábrica cuando se aumenta a tres el número de servidores en la estación de control de calidad?

   Solución: no cambia ya que en estado estacionario la tasa efectiva de entrada es igual a la de salida. Como se indicó en la pregunta 2, se supone que se cumplen las condiciones de estacionariedad, es decir, que cada sistema, en particular el de control de calidad, cumple las condiciones de regimen estacionario. Al agregar un servidor más a este sistema las condición para regimen estacionario con mayor razón se sigue cumpliendo. En conclusión, se sigue cumpliendo que la tasa de entrada al sistema es igual a la de salida y por tanto la tasa de salida no cambia ya que la tasa de entrada no cambia.

7. (1 p) Calcule la distribución de probabilidades del número de estaciones con exactamente $k \in \{0, 1, ...\}$ trabajos en un mismo instante en la línea de ensamblaje.

   Solución:

   Sea Q_1 el número de estaciones con k trabajos en un mismo instante considerando desde la estación 1 hasta la $j^* - 1$, y sea Q_2 el número de estaciones con k trabajos en un mismo instante considerando desde la estación j^* hasta la N.

   Se tiene que el número de estaciones con exactamente $k \in \{0, 1, ...\}$ trabajos en un mismo instante en la línea de ensamblaje será $Q = Q_1 + Q_2$.

   Como el núumero de trabajos en cada estación se puede considerar en forma independiente se tiene que $Q_i \longrightarrow Binomial(n_i, q_i),\ i \in \{1, 2\}$, donde $n_1 = j^* - 1,\ n_2 = N - j^* + 1,\ q_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$, y $q_2 = \left(\frac{\lambda_{j^*}}{\mu_1}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_{j^*}}{\mu_1}\right)$. De donde finalmente se tiene que:

   Si $j^* - 1 \leq N - j^* + 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
P(Q = l) &= \sum_{j=0}^{l} P(Q = l \wedge Q_1 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{l} P(Q_1 = j \wedge Q_2 = l - j) \\
&= \sum_{j=0}^{l} P(Q_1 = j) P(Q_2 = l - j) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \frac{n_1!}{j!(n_1 - j)!} q_1^j (1 - q_1)^{(n_1 - j)} \frac{n_2!}{j!(n_2 - (l - j))!} q_2^{(l-j)} (1 - q_2)^{(n_2 - (l-j))}
\end{aligned}
$$

   $\forall 0 \leq l \leq N$, y $P(Q = l) = 0$ en cualquier otro caso.

   Si $j^* - 1 > N - j^* + 1$, entonces el resultado es análogo basta intercambiar los subíndices.

Problema 2

En la estación espacial de Cabo Cartagena un equipo experto monitorea los signos vitales de los astronautas que se encuentran orbitando.

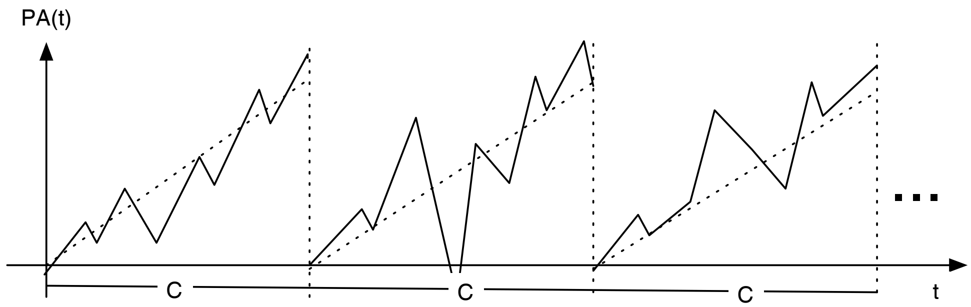
Para modelar la presión arterial (en torno al nivel normal) se propone el proceso PA(t) como sigue:

$$PA(t) \quad = \begin{cases} B(t) - B(\lfloor t/C \rfloor C) & si\ \lfloor t/C \rfloor\ es\ par \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde $B(t)$ es el browniano con drift μ.

1. Responda las siguientes preguntas

R: La idea es que $B(t)$ es llevado al origen al comienzo de cada ciclo par de largo C.



- ¿Cuál es la distribución de PA(t) ?

  R: Es $N(s\mu, s)$ con $s = t - \lfloor t/C \rfloor C$ para el caso par. Igual a 0 con probabilidad 1 para el caso impar.

- ¿Posee incrementos independientes?

  R: Si pues un incremento del pasado no influye en el incremento del futuro (lo hereda del Browniano con drift en el caso par y del caso PA = 1 en el caso impar).

- ¿Posee incrementos estacionarios ?

  R: No, pues se tienen tasas distintas segn donde se este parado, en particular si nos paramos en un intervalo impar no hay incrementos.

- ¿Que ocurre con Cov(PA(t),PA(s)) ?

  R: Dado que siempre se va a 0 al inicio de cada ciclo, para t y s en ciclos distintos será igual a 0 y si se está en el mismo ciclo será $min(t - k, s - k)$ con $k = t - \lfloor t/C \rfloor C$.

- ¿Concluya si es un Browniano estándar o no.

  R: Claramente no lo es.

Si la presión de un astronauta llega al nivel $-W$ con $W > 0$ este se desmaya.

2. Demuestre que la probabilidad que se desmaye en en [0,C] es positiva. Calcule la probabilidad de que se desmaye en $[0, T]$ con $T > 0$ suponiendo que la probabilidad anterior es p.

   R: Para demostrar que $p > 0$ bastaba decir que la probabilidad de el browniano este bajo la barrera $-W$ en un instánte $s \in [0, C]$ es mayor que cero. Si el Browniano en este instante s se encuentra bajo esta barrera, entonces implica que cruzó la barrera en un instánte $r \in [0, s]$ con lo que se tiene $p > \int_{-\infty}^{-W} \phi(x)_{(\mu s, s)} dx > 0$ [1]. Luego la probabilidad que haya cruzado la barrera en $[0, T]$ suponiendo que T cae al final de un ciclo será equivalente a tener al menos un éxito en *número de ciclos pares contenidos en [0,T]* $= I(T)$ intentos, es decir será $\sum_{i=1}^{\infty} B(i, p, I(T))$.

[1] $\phi(x)_{(\mu,\sigma^2)}$ es la fdp de una normal de media μ y varianza σ^2

3. Calcule la probabilidad de que un paciente se desmaye alguna vez suponiendo $C \to \infty$ (al igual que para la parte siguiente).

   Para esto utilice el siguiente resultado del paseo al azar usando $p = 1/2(1 + \mu\Delta x)$.

$$P(ir\ a\ N\ antes\ que\ a\ 0\ partiendo\ de\ i) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^i}{1-(\frac{1-p}{p})^N}$$

   Hint: Recuerde que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

   R: Este resultado fué calculado en la auxiliar.

En el caso de detectar un desmayo, para determinar si la medición fué producto de un error, se complementa la información anterior con el indicador $f(W) = E(e^{\tau_W - K})$ que mide la separación entre su tiempo de desmayo esperado y el tiempo de desmayo observado K.

3. Encuentre una ecuación diferencial para $f(W)$.

   R: Se sigue el procedimiento habitual de condicionar por B_h luego se expande $f(W - B_h)$ en torno a W y se expande la exponencial en torno a 0. Luego se calcula la esperanza tomando en cuenta la esperanza y varianza de B_h (μh y h) respectivamente, Finalmente se hace tender h a 0 y se tiene el resultado.

$$\begin{aligned}
f(W) &= E_{B_h}[f(W)|B_h] \\
&= E_{B_h}[E[e^{\tau_{W-B_h}-K+h)} + o(h)]] \\
&= E_{B_h}[f(W-B_h)\cdot e^h + o(h)] \\
&= E_{B_h}\left[\left(f(W) - B_h f'(W) + \frac{1}{2}B_h^2 f''(W) + o(h)\right)\cdot[1+h+o(h)]\right] \\
&= f(W)\cdot(1+h) - (1+h)hf'(W) + (h+\mu^2h^2)(1+h)f''(W) + o(h)
\end{aligned}$$

   $\Rightarrow f'(W) = f(W) + \frac{1}{2}f''(W)$

4. Indique como se relaciona $f(A+B)$ con $f(A)$, $f(B)$ y determine la forma funcional de $f(W)$.

   R: Tenian que llegar a la relación $f(A+B) = e^K f(A)f(B)$ y de ahi concluir que $f(W) = e^{(W-K)}$