



DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN71L - Modelos Estocásticos
Sem.: Primavera 2002
Prof: Raúl Gouet
P. Aux: Denis Sauré, Natalia Yankovic

EXAMEN RECUPERATIVO

Viernes 06 de Diciembre, 2002

Pregunta 1

Suponga que la intersección de dos calles unidireccionales, que llamaremos a y b , está regulado por un semáforo, tal como se ilustra en la figura. El semáforo funciona en un ciclo de C unidades de tiempo, de las cuales un tiempo A corresponde a luz verde para la calle a y un tiempo B verde para la calle b (sólo hay luces verdes y rojas).

Por la calle a llegan autos según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_a[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$, mientras que por la calle b llegan autos según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_b[\frac{\text{autos}}{u.t.}]$. Los autos que llegan a la intersección y encuentran la luz en verde cruzan inmediatamente, pero si encuentran el semáforo en rojo deben esperar hasta el próximo cambio de luz, momento en que cruzan instantáneamente la intersección (el tiempo que demoran en cruzar es despreciable).

Si ambas calles son lo suficientemente anchas como para que no se formen colas y no está permitido que los vehículos doblen en este cruce, conteste las siguientes preguntas:

1. (1,0 pts) Realice un diagrama que muestre el número de automóviles esperando cruzar la intersección en una de las dos calles (por ejemplo la calle a) en función del tiempo y otro que muestre el número total de automóviles que han cruzado la intersección en función del tiempo. ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzan la intersección en 1 ciclo del semáforo? HINT: Considere que un ciclo termina cuando cruzan instantáneamente los autos esperando en la calle para la cuál el ciclo comienza y termina cuando cae la luz verde.
2. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que cruzaron por la calle a ?
3. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron la intersección N_a autos por la calle a , ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de autos que tuvo que esperar por cruzar?
4. (1,0 pts) Si en un ciclo cruzaron en total N autos por la intersección, ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el número de autos que NO tuvo que esperar por cruzar?

Suponga ahora que los automovilistas que circulan por la calle a perciben un costo igual a $\$M \cdot t$, donde t es el tiempo que deben esperar antes de poder cruzar, mientras que para los automovilistas que circulan por la calle b este costo queda bien modelado por la expresión $\$M \cdot t^2$

4. (2,0 pts) Calcule el costo esperado incurrido por los automovilistas que esperan en un ciclo del semáforo. HINT: Puede ser útil calcular la esperanza del tiempo que debe permanecer un automovilista frente a la luz roja, condicional a que llega cuando la luz está roja.

Pregunta 2

Un ex-subsecretario de transportes de un país muy lejano, llamado Tom Bollinery, es el encargado de recibir propuestas para una licitación de Plantas de Revisión Técnica en una ciudad al sur del país, llamada Arrankawua. Sobre su escritorio caben un número indeterminado de sobres con propuestas, los que llegan según un proceso de poisson de tasa λ propuestas por hora. Sin embargo la licitación

está arreglada de antemano, la cual previo pago de algunas comisiones será ganada por un amigo de Tom Bollinery, por lo que el ex-subsecretario ni siquiera mira las propuestas que le llegan, sino que simplemente a intervalos de tiempo exponencialmente distribuidos de tasa μ , toma todos los sobres que encuentre sobre su escritorio y los bota a la basura.

1. (1,5 pts) Modele la cantidad de sobres con propuestas, sobre la mesa del subsecretario Bollinery como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario.
2. (1,0 pts) ¿Cuánto tiempo estará una propuesta sobre el escritorio del subsecretario?. Cuál es el promedio de propuestas en el escritorio del subsecretario en el largo plazo?.

Considere que como era de esperar la licitación fue adjudicada al amigo de Tom Bollinery, el cual lo ha contratado a ud. para estudiar el sistema de espera de la Planta de Revisión Técnica. La planta consta de dos estaciones idénticas, que funcionan en paralelo que pueden ser modeladas como colas M/M/1/3. Esto es las llegadas son según un proceso de Poisson de tasa λ autos por hora, las atenciones son exponenciales de media $\frac{1}{\mu}$ horas, y la capacidad de cada estación es de 3 autos incluyendo al que se está sirviendo. Cuando un cliente llega se ubica en la estación que tenga menos autos y frente a empates, SIEMPRE prefieren la estación 1. Además los clientes que se encuentran al *final de cada fila*, se cambian instantáneamente a la cola de la otra estación si es que al cambiarse el número de autos que quedan delante de él es menor que el actual.

3. (2,0 pts) Modele el estado de ocupación de cada estación de la Planta de Revisión Técnica en una única Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Encuentre la condición sobre las tasas para que exista régimen estacionario.
4. (1,5 pts) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, entregue expresiones para :
 - a) La fracción de clientes que en una hora no pueden ingresar al sistema porque no hay capacidad disponible.
 - b) El número promedio de autos esperando por atención en toda la Planta.
 - c) El tiempo promedio de espera en cola de una auto que logra ingresar a la planta.

