



Examen Recuperativo 6 de Diciembre de 2005

Problema 1

- (1.5 pts.) Sea B_t un movimiento Browniano estándar y $f(x) = E[\inf\{t/B_t = x\}]$. Encuentre $f(x)$. Para esto se sugiere seguir los siguientes pasos:
 - Plantee una ecuación diferencial para $f(x)$.
 - Encuentre una relación entre $f(x+y)$, $f(x)$ y $f(y)$. Concluya.
- La Compañía de Emergencias de una región ha dividido su área de cobertura para combatir terremotos en N zonas. El número de terremotos que ocurren en la zona i sigue un proceso de Poisson de tasa λ_i [terremotos/mes], $i \in \{1, \dots, N\}$. Diremos que un terremoto es de intensidad *crítica* si su intensidad es mayor que el valor I^* , conocido por la compañía. De lo contrario, diremos que el terremoto es de intensidad *no crítica*. Se sabe que la intensidad x de cada terremoto, independiente de la zona en que ocurre, sigue una distribución conocida $F(x)$.
 - (1.0 pto.) ¿Cuántos días pasan, en promedio, desde que se produce un terremoto de intensidad *crítica* en la zona 1 hasta el próximo terremoto de intensidad *no crítica* en una zona diferente a ésta?
 - (1.0 pto.) Se sabe que en un intervalo de tiempo $[0, t]$ ha ocurrido un total de M terremotos. ¿Cuál es la probabilidad de que el último de los terremotos de intensidad *no crítica* haya ocurrido entre $t/4$ y $t/3$?
 - (2.0 pts.) Suponga que el k -ésimo terremoto de intensidad crítica que ocurre en la región, independiente de la zona en que ocurre, provoca un *daño* D_k en las dependencias de la región. Los D_k , $k \geq 1$, son v.a. exponenciales de parámetro γ , todas iid e independientes del número de terremotos. El daño debido a uno de estos terremotos decrece exponencialmente en el tiempo, i.e., para un terremoto de intensidad crítica de daño inicial D , t unidades de tiempo después al instante en que ocurrió, su daño es cuantificado en $De^{-\alpha t}$. Si suponemos que los daños de estos terremotos son aditivos, muestre que la esperanza de los daños totales cuantificados en un instante t puede ser expresada como:

$$\frac{h(F(I^*), \lambda_1, \dots, \lambda_N)}{\alpha\gamma}(1 - e^{-\alpha t}),$$
 en que h es una función a determinar.
 - (0.5 pts.) La Compañía de Emergencias incurre en un costo $\$C_i$ por cada terremoto ocurrido en la zona i . Además, si el incendio es de intensidad crítica se incurre en un costo adicional $\$A_i$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Considere también que la Compañía percibe costos fijos de operación cuantificados en $K[\$/mes]$. En promedio, ¿Cuál es el costo mensual en que incurre la Compañía?

Problema 2

- Considere un proceso estocástico X_t que satisface la siguiente ecuación:

$$dX_t = (\eta - \mu X_t)dt + \sigma dB_t \quad X_0 = x_0,$$

en que η y σ son constantes reales y B_t es un movimiento Browniano estándar.

- (2.0 pts.) Resuelva la ecuación.
 - (1.5 pts.) Calcule $E(X_t)$, $Var(X_t)$ y $Cov(X_s, X_t)$.
 - (1.0 pto.) Sea $N_x(t)$ el número de veces que X_t ha alcanzado el valor $x \in \mathbb{R}$. Ordene de menor a mayor los valores que usted esperaría para $N_0(t)$, $N_\eta(t)$ y $N_a(t)$, en que a es una constante positiva. Justifique claramente su respuesta. ¿Qué esperaría respecto a las variaciones de X_t en el “corto plazo”?
- (1.5 pts.) Sea B_t un movimiento Browniano estándar. Muestre que:

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = 2B_t \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t s dB_s - \frac{2}{3}B_t^3$$

Problema 3

Desde un puerto de la Región V salen 2 tipos de barcos: barcos **Grandes** que pueden transportar hasta G [contenedores] y barcos **Chicos** que tienen capacidad para C [contenedores], con $G > C$.

Los barcos llegan con toda su capacidad disponible al puerto y son cargados con todos los contenedores que han llegado al puerto desde la partida del último barco y puedan ser cargados (dada la capacidad del barco); es decir, Si hay más contenedores que la capacidad disponible, el barco zarpa lleno y los contenedores restantes quedan en el puerto esperando el próximo barco respetando el orden de llegada.

Suponga que el tiempo para cargar los barcos es despreciable y que el puerto cuenta con capacidad ilimitada para almacenar contenedores a la espera de un navío para ser cargados.

La empresa naviera tiene la siguiente política para determinar las rutas de sus barcos: si quedaron contenedores sin cargar en el puerto, el próximo barco en llegar es **Grande**; si se lograron cargar todos los contenedores en el último barco, el próximo en llegar será **Chico**.

1. Considere que los barcos llegan cada intervalos de tiempo discretos de T [horas] y que la probabilidad de que lleguen i contenedores entre la partida de un barco cualquiera y la partida del siguiente es α_i . Recuerde que un barco zarpa casi inmediatamente después de que llegó, ya que el tiempo de carga es despreciable.

- a) (2.0 pts.) Modele el número de contenedores esperando en el puerto en el instante inmediatamente posterior a la partida de un barco como una cadena de Markov en tiempo discreto.

Suponga que la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas.

- b) (1.0 pto.) En promedio y en el largo plazo, ¿Qué fracción de los barcos parte lleno?
2. Considere ahora que el tiempo entre la llegada de un barco y la llegada del siguiente puede ser representado por una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu$ [horas] y que los contenedores son enviados al puerto de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [contenedores/hora]. Además, la política de asignación de barcos se mantiene tal como en la parte 1.
 - a) (2.0 pts.) Modele el número de contenedores esperando por ser cargados en el puerto en cualquier momento tiempo como una cadena de Markov de tiempo continuo. Para esto utilice estados definidos como pares $(i, \text{"tipo"})$ donde i es el número de contenedores en el puerto y “tipo” indica si el próximo barco que llegará al puerto será **Grande** o **Chico**.
Considere los casos genéricos: (i, Chico) para $i \leq C$ e $i > C$ e (i, Grande) para $i \leq G$ e $i > G$.
 - b) (1.0 pto.) Suponga que la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas. En un instante t cualquiera en el largo plazo:
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo barco que llegue al puerto sea **Grande**?
 - Si antes de t habían cero contenedores en espera por ser cargados y justo en t llega un contenedor, ¿Cuál es el tiempo esperado desde t hasta que haya cero contenedores en espera?