



Examen, 2 de Diciembre de 2005

Problema 1

Una comuna puede ser dividida en 4 sectores, *Norte*, *Sur*, *Este* y *Oeste*. El cuerpo de seguridad de la comuna cuenta sólo con 1 auto-patrulla para custodiar estos sectores, por lo que debe hacer traslados en el tiempo de acuerdo a la siguiente dinámica:

El tiempo que la patrulla custodia la zona i , $i \in \{N, S, E, O\}$, distribuye según una v.a. exponencial de media $1/\gamma_i$ [minutos], luego del cual se dirige a otro sector. Saliendo desde el norte o desde el sur, con probabilidad p se dirige al *este* y con probabilidad $(1-p)$ al *oeste*. Saliendo desde el este o desde el oeste, con probabilidad q se dirige al *norte* y con probabilidad $(1-q)$ al *sur*.

1. (1,0 pto.) Modele la ubicación de la patrulla como una cadena de Markov de tiempo continuo. ¿Admite esta cadena una única ley estable? Justifique su respuesta y, en caso de que sea afirmativa, además plantee el sistema de ecuaciones que permite encontrar esta ley.

Una temida banda de delincuentes de la comuna se ha propuesto arruinar el único automóvil de la patrulla de seguridad. Para ello, organizan una emboscada cada 10.080 [minutos]¹. La probabilidad de que la banda realice esta emboscada en el sector j es r_j , $j \in \{N, S, E, O\}$.

La patrulla salva ilesa con seguridad si es que la emboscada ocurre en un sector distinto al que ella se encuentra, mientras que si ocurre en el mismo sector en que ella se encuentra existe una probabilidad $s > 0$ de que el auto-patrulla termine arruinado por la emboscada (de lo contrario salva ilesa).

2. (0,5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que la patrulla salve ilesa a un intento de emboscada?
3. (1,0 pts.) ¿En cuánto tiempo se espera que el auto-patrulla sea arruinado?

Luego de la ruina en que ha quedado el automóvil anterior, la patrulla ha extremado recursos para la adquisición de un nuevo vehículo. Los desplazamientos ahora contemplan la misma dinámica anterior, con la salvedad de que la patrulla permanece exactamente τ_i [minutos] en el sector i , $i \in \{N, S, E, O\}$.

4. (1,0 pto.) Modele la ubicación de la nueva patrulla como una cadena de Markov de tiempo discreto. Si denotamos por P a la matriz de probabilidades de transición de esta cadena, ¿Existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$? Justifique su respuesta y, en caso de que sea afirmativa, plantee el sistema de ecuaciones que permite encontrar la ley estable de la cadena.

La ineffectividad de esta nueva patrulla ha hecho crecer la impopularidad del alcalde de la comuna. Se ha estimado que la impopularidad en el sector que se encuentra la patrulla se comporta como un movimiento Browniano durante su permanencia. La impopularidad en cada sector vuelve a cero cada vez que la patrulla se retira de ese sector, sin embargo, si la impopularidad sobrepasa el valor I_M en algún momento, el alcalde renuncia a su cargo.

5. (2,5 pts.) Si la patrulla comienza en el sector *norte*, ¿Cuánto tiempo se espera que el alcalde permanezca en su cargo desde la puesta en operación de la nueva patrulla?

Indicación: Recuerde que $P[B_t^* \geq x] = P[|B_t| \geq x] \forall x \geq 0$ en que B_t es un movimiento Browniano estándar y $B_t^* = \max_{0 \leq s \leq t} \{B_s\}$.

¹ 1 semana=10.080 [minutos].

Problema 2

1. Un puente Browniano entre a y b puede ser representado para $t \in [0, 1)$ en forma diferencial como

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1 - t} dt + dB_t \quad X_0 = a,$$

en que B_t representa un movimiento Browniano estándar.

- a) (2.0 pts.) Resuelva la ecuación anterior.

Indicación: Puede ser útil postular una solución del tipo $g(t)\{X_0 + c(t) + \int_0^t h(s)dB_s\}$

- b) (0.5 pts.) ¿Qué valor definiría para X_1 ? Justifique su respuesta.
 - c) (1.5 pts.) Para $0 \leq s \leq t < 1$, $a = b = 0$, calcule $E(X_t)$ y $Cov(X_s, X_t)$.
2. (2.0 pts.) Considere una empresa minera que afronta estocasticidad tanto en el precio del *commodity* que extrae como en otros fenómenos que aportan “ruido” (tales como la ley del mineral que extrae y los cambios tecnológicos). Si x representa el precio del commodity e y representa la cantidad extraída, un modelo simple para el ingreso por ventas de la firma lo representaremos por la función $F(x, y) = xy$, en que x e y siguen un movimiento Browniano geométrico con drift α_x y α_y y varianzas σ_x y σ_y , respectivamente y tal que $E[dB_t^x dB_t^y] = \rho dt$ (B_t^x y B_t^y denotan al Browniano estándar en la fórmula para x e y , respectivamente). A su vez, los costos de la operación minera los representaremos por la función $G = \ln(xy)$. Se define el beneficio neto de la firma como $H = F - G$. Entregue una expresión para dH . Muestre que para $\alpha_x = \alpha_y = 1/2$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\rho = 1$, dH puede ser expresado como:

$$dH = w(F)dB_t^x + w(F)dB_t^y,$$

en que $w(F)$ es una función a determinar.

Problema 3

Una fábrica de tornillos opera de forma continua en 3 turnos de 8 horas cada uno. La persona encargada de cada turno opera las 2 máquinas que posee la empresa. Cada una produce tornillos según un proceso de Poisson de tasa λ [tornillos/hora].

Un tornillo es considerado defectuoso si es *muy grande* o *muy pequeño*, esto ocurre con probabilidad r_g y r_p respectivamente; de lo contrario, es considerado como no defectuoso.

La empresa incurre en un costo $\$C_g$ por cada tornillo *muy grande*, en un costo $\$C_p$ por cada tornillo *muy pequeño* y en un costo $\$C_n$ por cada tornillo normal. Cada máquina consume recursos valorados en $E[\$/hora]$ mientras que cada trabajador cobra $S[\$/turno]$.

1. (0,5 pts.) El trabajador del primer turno le comenta al trabajador del segundo turno que ha terminado muy cansado hoy dada la alta producción de tornillos en su turno, así que le recomienda prepararse porque le espera un día de alta producción. Comente la situación.
2. (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 primeros tornillos de un turno sean defectuosos?
3. (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que en un turno la cantidad fabricada de tornillos *muy grandes* y *muy pequeños* sea la misma?
4. (1,0 pto.) En promedio, ¿Cuál es el costo por unidad de tiempo en que incurre la fábrica?
5. (1,5 pts.) Si la gerencia de la empresa decide cambiar las máquinas cuando se producen en forma consecutiva 6 ó más tornillos defectuosos ¿Cuántos tornillos se espera producir con las actuales máquinas antes de que la gerencia ordene el cambio?
6. (1,0 pto.) Suponga ahora que hay i tipos de defectos en los tornillos producidos, $i \in \{1, \dots, N\}$. Un tornillo es defectuoso de tipo i con probabilidad p_i y de lo contrario, con probabilidad $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^N p_i$, es no defectuoso (un tornillo defectuoso sólo puede tener un tipo de defecto). ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan tornillos defectuosos de todos los tipos antes de producir el primer tornillo no defectuoso?