



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliares: Mario Guajardo, Daniel Yung

Examen de Tercera Instancia 27 de Enero de 2006

Problema 1

Considere una tienda que distribuye un único producto, muy exclusivo, a N clientes. Para otorgarles un buen nivel de servicio mantiene unidades de este producto almacenadas, siendo administradas mediante un Sistema de Revisión Periódica Mensual.

De esta manera al comenzar cada mes la tienda revisa el nivel de inventario, n , que considera las existencias en la tienda, y pide a su proveedor una cantidad $T - n$ de unidades ($0 \leq n \leq T$), donde T corresponde al nivel de inventario objetivo ($T \leq N$). La cantidad pedida demora exactamente un mes en llegar, es decir, estará disponible al comienzo del siguiente mes (antes de hacer el pedido).

1. (1.0 ptos.) Suponga que, independiente de todo, cada cliente mensualmente puede demandar sólo una unidad del producto, y que lo hace con probabilidad p . ¿Con qué probabilidad la tienda ve una demanda mensual igual a k unidades? Llame a esta probabilidad α_k ($0 \leq k \leq N$).
2. (1.0 ptos.) Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades del producto, ¿en qué estados se podrá encontrar el sistema al inicio del siguiente mes? ¿qué probabilidades tienen asociadas las transiciones posibles?

Indicación: Considere que la demanda insatisfecha se pierde.

3. (1.0 ptos.) Utilizando las probabilidades calculadas en las partes anteriores, modele el nivel de inventario de la tienda al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

Suponga ahora que con probabilidad q la cantidad pedida en un mes cualquiera requiere un mes adicional para su llegada a la tienda. Además, considere que el nivel de inventario ahora está definido por las existencias en la tienda y la cantidad de productos que vienen en camino.

4. (0.5 ptos.) ¿Qué información adicional debe incorporarse a los estados definidos anteriormente para representar el nuevo escenario del sistema como una Cadena de Markov?
5. (1.5 ptos) Para el nuevo escenario, modele el nivel de inventario al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
6. (1.0 ptos.) Considere conocidas las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte anterior, y suponga que la estructura del costo fijo de pedido al inicio de cada mes está dada por la siguiente expresión:

$$C(n) = \begin{cases} A & \text{si } n \leq T/2 \\ B & \text{si } n > T/2 \text{ con } (B < A) \end{cases}$$

Determine el costo fijo de pedido esperado en el largo plazo.

Problema 2

1. Considere un proceso estocástico S_t que satisface la siguiente ecuación:

$$dS_t = k(\mu - \ln(S_t))S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad S_0 = s_0,$$

en que k , μ y σ son constantes reales y B_t es un movimiento Browniano estándar (este modelo es a menudo usado para modelar el precio de commodities como el cobre).

- a) (2.0 pts.) Resuelva la ecuación.

Indicación: Puede ser útil postular una solución del tipo $\ln(S_t) = g(t)\{\ln(S_0) + c(t) + \int_0^t h(s)dB_s\}$

- b) (1.0 pts.) Calcule $E(\ln(S_t))$ y $Var(\ln(S_t))$.

2. Considere un computador cuyo procesador cambia de temperatura de acuerdo a:

$$T(t) = a + X(t)$$

Donde $X(t)$ es un proceso Browniano estándar. Considere que $T(t)$ puede alcanzar valores negativos y $a > 0$. El dueño del computador sabe que si $T(t) > b$, para un valor dado $b > 0$ el computador se apaga automáticamente para evitar daños graves para el equipo provocados por la alta temperatura de funcionamiento, produciéndose de todas formas, daños menores en el equipo al alcanzar la temperatura b .

Debido a que el usuario del computador no es capaz de determinar la temperatura del procesador y para operar el equipo tratándolo de evitar daños en él, ha decidido usar el computador por períodos de exactamente m minutos. Al inicio de cada período la temperatura del equipo es a y este se apagará instantáneamente al alcanzar temperatura b .

- a) (1.0 pto.) ¿Cuántos **períodos** de m minutos se espera que pasen hasta que se produzca el primer “apagón” del computador?
- b) (2.0 pto.) ¿Cuántos **minutos** se espera que pasen hasta que se produzca el primer “apagón” del computador?

Problema 3

Usted acaba de ser contratado por el departamento de estudios de una importante empresa de retail chilena, con el fin implementar un sistema de subastas en el sitio web de la empresa, y así vender mediante este mecanismo productos tecnológicos exclusivos.

Usted ya ha determinado cómo se debe implementar el sistema: los clientes entrarán a la página de la empresa (sección subasta), elegirán el producto por el que quieren ofertar y luego ingresarán el monto por el cual desean comprar el artículo en cuestión. Además podrán monitorear en línea el estado de la subasta y hacer contraofertas.

A continuación estudiaremos el proceso de venta de un artículo en particular. Para determinar las ganancias potenciales del método de venta, usted realiza los siguientes supuestos:

- Las personas acceden a la página de la empresa de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [personas/hora].
- Las personas están dispuestas a gastar una cantidad x en la compra del artículo. Esta cantidad x es una variable aleatoria continua de distribución F (conocida), común para todas las personas (e independientes entre sí).
- Las personas ofertan la cantidad mínima que les asegura llevarse (momentáneamente) el artículo. Considerando que la subasta es monitoreada en tiempo real, si llegase a subir el precio del artículo en la subasta, una persona igualará la oferta de inmediato (subirá el precio en una cantidad despreciable), siempre y cuando no supere su disposición a pagar x .
- La subasta comienza con un precio inicial 0.

- La subasta dura exactamente T horas.
- La persona que hizo la mejor oferta se lleva el producto pagando por él un valor igual al de su oferta.

Bajo estos supuestos notamos que la persona que se lleva finalmente el artículo difícilmente estará pagando el máximo que hubiese estado dispuesto a pagar por él. Considerando $F \rightarrow U[0, 1]$ responda:

1. (1,0 pto.) Si en el instante t el precio de la mejor oferta es P , ¿cuál es la probabilidad de que el artículo se venda finalmente a ese precio?
2. (1,5 pto.) Si en el instante t el precio de la mejor oferta es P , ¿cuál es la probabilidad de que el artículo se venda a quien hizo esa oferta?
3. (2,0 pto.) ¿Cuál es la esperanza del precio de venta del artículo?
4. (1,5 pto.) ¿Cuánto ahorra, en términos esperados, el cliente que gana la subasta (respecto a lo que hubiese estado dispuesto a pagar)?

Tiempo: 2:30
SIN APUNTES