



## Examen Recuperativo 6 de Diciembre de 2005

### Problema 1

1. Se llega a que  $f(x) = \frac{x}{\mu}$ . Para el desarrollo, ver problema 8.16 Ross, que es similar.
2. Notar que el proceso de incendios de cada tipo en el total de la comuna resulta de componer los procesos de incendios ocurridos de cada tipo en cada zona. Con esto, el número de incendios de alta peligrosidad en la comuna sigue un proceso de Poisson de tasa  $(p_A \sum_{i=1}^N \lambda_i)$  (que en adelante llamaremos  $\lambda_A$ ) y el número de incendios de baja peligrosidad en la comuna sigue un proceso de Poisson de tasa  $(p_B \sum_{i=1}^N \lambda_i)$  (que en adelante llamaremos  $\lambda_B$ ).

De un razonamiento análogo al anterior, el total de incendios de baja peligrosidad en zonas diferentes a la zona 1 siguen un proceso de Poisson de tasa  $(p_B \sum_{i>1}^N \lambda_i)$ . Debido a que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson distribuyen exponencialmente y a la pérdida de memoria de la exponencial, desde que se produce un incendio de alta peligrosidad en la zona 1 hasta el próximo incendio de baja peligrosidad en una zona diferente a ésta transcurre en promedio:

$$\frac{1}{p_B \sum_{i>1}^N \lambda_i} [hr]$$

3. Sabemos que la distribución condicional de los tiempos de llegadas en un proceso de Poisson de eventos ocurridos en  $[0, t]$  son v.a. iid uniformes de parámetros  $(0, t)$ .  
Supongamos que de los  $M$  incendios,  $k$  han sido de baja peligrosidad.  
La densidad del máximo de  $k$  v.a. iid uniformes  $(0, t)$  es

$$g(x) = k \left( \frac{x}{t} \right)^{k-1} \frac{1}{t}$$

Sea  $U$  una variable aleatoria que representa el instante en que se produce el último incendio de baja peligrosidad (en el intervalo  $[0, t]$ ). Entonces,

$$P(t/3 \leq U \leq t/2) = \int_{t/3}^{t/2} k \left( \frac{x}{t} \right)^{k-1} \frac{1}{t} dx = \left( \frac{1}{2} \right)^k - \left( \frac{1}{3} \right)^k$$

Notar que este último resultado equivale a la probabilidad de que todos hayan llegado entre  $[0, \frac{t}{2}]$  menos el caso en que todos han llegado entre  $[0, \frac{t}{3}]$ , lo que claramente es la probabilidad de que el último haya ocurrido entre  $t/3$  y  $t/2$ . Esto se podría haber argumentado intuitivamente, sin necesidad del cálculo anterior, lo que para efectos de corrección también se considera correcto.

Ahora nos resta descondicionar el  $k$ . Para ello, notar que dado que llegaron  $M$  en total, el número de éstos que han sido de baja peligrosidad sigue una binomial  $(M, \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B})$ .

Luego la probabilidad pedida en el enunciado es:

$$\sum_{i=1}^M \binom{M}{k} \left( \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^k \left( \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^{M-k} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^k - \left( \frac{1}{3} \right)^k \right)$$

4. Sea  $D(t)$  el daño total en  $t$ .  $D(t)$  puede ser escrito de la siguiente forma:

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N_A(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)}$$

donde  $N_A(t)$  es el número de incendios de alta peligrosidad ocurridos hasta  $t$  y  $S_i$  denota el instante en que ocurrió el  $i$ -ésimo de estos incendios. Se tiene que:

$$E[D(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[D(t)/N_A(t) = n]P(N_A(t) = n)$$

Calculemos primero una parte del argumento de la sumatoria:

$$\begin{aligned} E[D(t)/N_A(t) = n] &= E\left[\sum_{i=1}^{N_A(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)} / N_A(t) = n\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha(t-S_i)} / N_A(t) = n\right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[D_i e^{-\alpha(t-S_i)} / N_A(t) = n] \\ &= \sum_{i=1}^n E[D_i / N_A(t) = n] E[e^{-\alpha(t-S_i)} / N_A(t) = n] \\ &= E[D] \sum_{i=1}^n E[e^{-\alpha(t-S_i)} / N_A(t) = n] \\ &= E[D] e^{-\alpha t} \sum_{i=1}^n E[e^{\alpha S_i} / N_A(t) = n] \end{aligned}$$

Donde hemos usado propiedades de la esperanza y la independencia de los  $D_i$  y  $N_A(t)$  y hemos llamado  $D$  a la distribución común de los  $D_i$ , que se sabe es v.a. exponencial de parámetro  $\gamma$ , luego  $E[D] = \frac{1}{\gamma}$ . Además, notar que los  $S_i$  condicionados en  $N_A(t) = n$ , son v.a. i.i.d. uniformes entre 0 y  $t$ . Luego:

$$\sum_{i=1}^n E[e^{\alpha S_i} / N_A(t) = n] = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{e^{\alpha x}}{t} dx = \frac{n}{\alpha t} (e^{\alpha t} - 1)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[D(t)/N_A(t) = n] &= \frac{n}{\alpha t} E[D] e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} - 1) \\ &= \frac{n}{\alpha \gamma t} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Volviendo entonces a la primera expresión:

$$\begin{aligned} E[D(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha \gamma t} (1 - e^{-\alpha t}) P(N_A(t) = n) \\ &= \frac{1}{\alpha \gamma t} (1 - e^{-\alpha t}) \sum_{n=1}^{\infty} n P(N_A(t) = n) \\ &= \frac{\lambda_A}{\alpha \gamma} (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

(En que como se especificó al comienzo de la pauta,  $\lambda_A = p_A \sum_{i=1}^N \lambda_i$ ).

## Problema 2

## Problema 3

1. a) Una cadena que modela la situación está definida con conjunto de estados  $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$  que representan el número de pasajeros que quedan en el terminal cuando parte un bus. Las probabilidades de transición son:

$$p_{jk} = \begin{cases} \sum_{i=0}^C \alpha_i & \text{si } j, k = 0, \\ \sum_{i=0}^{G-j} \alpha_i & \text{si } j \neq 0, k = 0, \\ \alpha_{k+C} & \text{si } j = 0, k \neq 0, \\ \alpha_{k+G-j} & \text{si } j, k \neq 0. \end{cases}$$

- b) Cada transición corresponde a la partida de un bus. Por la política de la empresa, sabemos que siempre que el estado no es 0 parten buses grandes. Por lo tanto, la fracción que se pide es:  $\sum_{i \neq 0} \pi_i = 1 - \pi_0$ .
- c) Para calcular la fracción de los buses grandes que parten llenos, calculamos la fracción:

$$\frac{\text{fracción del total de buses que parte que son grandes y parten llenos}}{\text{fracción del total de buses que parte que son grandes}}.$$

El denominador fue calculado en el punto anterior. El numerador se calcula considerando que para cada estado posible  $k$  para el que parte un bus grande (es decir  $k \geq 1$ ), el número de pasajeros que deben llegar al terminal para que el próximo bus salga lleno debe ser igual o mayor a los que faltan para llenar el bus (es decir,  $\max(0, G - k)$ )<sup>1</sup>. Este numerador queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=\max(0, G-k)}^{\infty} \alpha_i \pi_k = \sum_{k=0}^{G-1} \sum_{i=G-k}^{\infty} \alpha_i \pi_k + \sum_{k=G}^{\infty} \pi_k.$$

Por lo tanto, la fracción de buses grandes que parten llenos es

$$\frac{\sum_{k=0}^{G-1} \sum_{i=G-k}^{\infty} \alpha_i \pi_k + \sum_{k=G}^{\infty} \pi_k}{1 - \pi_0}$$

2. a) Siguiendo las indicaciones, el conjunto de estados de la cadena es

$$\{(i, \text{chico}) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(i, \text{grande}) : i \in \mathbb{N}\} = \{(0, \text{chico}), (1, \text{chico}), (2, \text{chico}), \dots, (1, \text{grande}), (2, \text{grande}), \dots\}.$$

Las tasas de transición son las siguientes:

- Para el estado  $(i, \text{chico})$ , si  $i \leq C$ :

$$q_{(i, \text{chico})(0, \text{chico})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i, \text{chico})(i+1, \text{chico})} = \lambda.$$

- Para el estado  $(i, \text{chico})$ , si  $i > C$ :

$$q_{(i, \text{chico})(i-C, \text{grande})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i, \text{chico})(i+1, \text{chico})} = \lambda.$$

- Para el estado  $(i, \text{grande})$ , si  $i \leq G$ :

$$q_{(i, \text{grande})(0, \text{chico})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i, \text{grande})(i+1, \text{grande})} = \lambda.$$

- Para el estado  $(i, \text{grande})$ , si  $i > G$ :

$$q_{(i, \text{grande})(i-G, \text{grande})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i, \text{grande})(i+1, \text{grande})} = \lambda.$$

- b) Según se indicó, el segundo valor que define el estado dice que tipo de bus es el próximo a partir. Por lo tanto, la probabilidad que se pide es:  $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{(i, \text{grande})}$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Esto es lo mismo que decir que para los estados  $k \geq G$  el bus siempre parte lleno y para los estados  $0 \leq k < G$ , parte lleno si llegan, al menos,  $G - k$  pasajeros.

<sup>2</sup>La probabilidad que el bus siguiente al próximo sea uno grande está dada por

$$\sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_{(i, \text{chico})} + \sum_{i=G+1}^{\infty} \pi_{(i, \text{grande})} + \sum_{i=0}^C \pi_{(i, \text{chico})} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{C-i+1} + \sum_{i=0}^G \pi_{(i, \text{grande})} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{G-i+1}.$$