Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Solución Clase Auxiliar 11
Movimiento Browniano, 7 de Noviembre de 2007

Problema 1

1. Una forma de ver esto es encontrar la distribución de X_t

$$\begin{aligned}
F_{X_t}[x] &= P[\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta t} \leq x] \\
&= P[B_{\theta t} \leq \sqrt{\theta}x] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\theta t}}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u'^2}{2t}}du'
\end{aligned}$$

   donde en la última ecuación se realizo el cambio de variables $u = u' \cdot \sqrt{\theta}$

   Vemos que efectivamente X_t es un proceso gaussiano. Ahora corroboraremos que la matriz de covarianzas se encuentra bien definida (es directo ver que $E[X_t] = 0$)

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= Cov(\frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta s}, \frac{1}{\sqrt{\theta}}B_{\theta s}) \\
&= \frac{1}{\theta} \cdot Cov(B_{\theta t}, B_{\theta s}) \\
&= \frac{1}{\theta} \cdot \text{mín}\{\theta t, \theta s\} \\
&= \text{mín}\{t, s\}
\end{aligned}$$

2. τ_a es el instante en que el movimiento Browniano toca por primera vez el nivel a.

   a) Para calcular esto condicionaremos sobre el valor que toma B_h

$$\begin{aligned}
f(a,\lambda) &= E_{B_h}[f(a,\lambda)|B_h] \\
&= E_{B_h}[E[e^{-\lambda(\tau_{a-B_h}+h)} + o(h)]] \\
&= E_{B_h}[f(a - B_h, \lambda) \cdot e^{-\lambda h} + o(h)] \\
&= E_{B_h}\left[\left(f(a,\lambda) - B_h f'(a,\lambda) + \frac{1}{2}B_h^2 f''(a,\lambda) + o(h)\right) \cdot [1 - \lambda h + o(h)]\right] \\
&= f(a,\lambda) \cdot (1 - \lambda h) + \frac{1}{2}h f''(a,\lambda) + o(h)
\end{aligned}$$

Dividiendo la última igualdad por h, y despejando vemos que

$$2\lambda f(a,\lambda) = f''(a,\lambda)$$

b) Vemos que

$$\begin{aligned} f(a+b,\lambda) &= E[e^{-\lambda\tau_{a+b}}] \\ &= E[e^{-\lambda(\tau_a+\tau_b)}] \\ &= f(a,\lambda)\cdot f(b,\lambda)) \end{aligned}$$

Con esto vemos que $f(a,\lambda)$ debe tomar la siguiente forma

$$f(a,\lambda) = \exp(a\cdot g(\lambda))$$

c) De la parte uno vemos que $\tau_{ab} = b^2\tau_a$. Basta tomar $\theta = b^2$ y notar que cuando se esta en τ_a el proceso escalado llega por primera vez a $a\cdot b$ es decir llega en el instante τ_{ab}

d) Dada la propiedad anterior vemos que la función $g(\lambda)$ es de la forma $c\cdot\sqrt{\lambda}$ con lo que se obtiene el resultado requerido. $f(a,\lambda) = \exp(c\cdot a\sqrt{\lambda})$

ahora, utilizando la ecuación diferencial encontrada en la parte *a*) vemos que

$$2\lambda\exp(c\cdot a\sqrt{\lambda}) = c^2 exp(c\cdot a\sqrt{\lambda})$$

por lo que $c = 2$ o $c = -2$. Sin embargo cuando $a\to\infty$ tenemos que $f(a,\lambda)\to 0$ por lo que solo nos sirve $c = -2$.

3. Resolvemos para $a > 0$. De las clases auxiliares sabemos que $E[M_t] = 1$, en particular

$$E[M_{\tau_a}] = 1 = E[e^{\alpha B_{\tau_a}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\tau_a}]$$

Escogiendo $\alpha = \sqrt{2\lambda}$ y notando que $B_{\tau_a} = a$ tenemos que

$$\exp(-\sqrt{2\lambda}a) = e^{-\lambda\tau_a}$$

Razonando por simetría se obtiene el resultado para todo a. El supuesto de $P[\tau_a\leq\infty] = 1$ se requiere para poder aplicar que $E[M_t] = 1$ en τ_a (MCT).

4. Aplicamos la desigualdad a τ_a y tomamos esperanza

$$\begin{aligned} E[\tau_a^{-1}] &= E[\int_0^\infty e^{-\lambda\tau_a}d\lambda] \\ &= \int_0^\infty E[e^{-\lambda\tau_a}]d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}a}d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{a^2}e^{-\mu}\mu d\mu \\ &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Donde en la última integral realizamos el cambio de variables $\mu = \sqrt{2\lambda}a$ e integramos por partes.

Problema 2

1. Claramente, la política que debe seguir Armijo es apretar el botón de pánico cada vez que la temperatuta alcance un determinado nivel. Es también claro que este nivel debe ser mayor que 0 y menoer que B. En otras palabras Armijo de be estimar un valor para $0 < X < B$ tal que cada vez que la temperatura de la caldera sea de $X[^\circ K]$ Armijo aprete el botón de pánico.

2. Condicionando sobre el valor que toma $Z_h = h\mu + B_h$ donde B_h es un browniano estándar:

$$\begin{aligned}
f(x) &= E_{Z_h}[f(x)|Z_h] \\
&= E_{Z_h}[f(x - Z_h) + h + o(h)] \\
&= E_{Z_h}[f(x) - Z_h f'(x) + \frac{1}{2} Z_h^2 f''(x) + h + o(h)] \\
&= f(x) - h\mu f'(x) + \frac{h + h^2\mu^2}{2} f''(x) + h + o(h)
\end{aligned}$$

   Reordenando, dividiendo la expresión por h y tomando el límite cuando $h \to 0$ se obtiene:

$$\mu f'(x) = \frac{1}{2} f''(x) + 1$$

   Se puede observar que $f(x)$ debe cumplir la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= E[\text{tiempo hasta alcanzar } x{+}y \text{ desde } 0] \\
&= E[\text{tiempo hasta alcanzar } x \text{ desde } 0] + E[\text{tiempo hasta alcanzar } x{+}y \text{ desde } x] \\
&= f(x) + E[\text{tiempo hasta alcanzar } y \text{ desde } 0] \\
&= f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

   De esta manera, es claro que $f(x)$ debe ser de la forma $f(x) = C \cdot x$. Reemplazando esta expresión en la ecuación diferencial anterior se obtiene:

$$\mu \cdot C = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\mu}$$

   De esta forma, el tiempo esperado hasta alcanzar el valor x, partiendo desde 0 es:

$$f(x) = \frac{x}{\mu}$$

3. Recordando teoría de renovación, el costo por unidad de tiempo de esta política corresponde a :

$$C_{NA} = \frac{E[\text{costo ciclo}]}{E[\text{duración ciclo}]} = \frac{M}{\frac{B}{\mu} + \frac{1}{\mu}} = \frac{M\mu}{B+1}$$

   Si un ciclo comienza cuando la caldera comienza a funcionar correctamente (o cuando esta falla).

4. De la misma forma que en la pregunta anterior, y definiendo que un ciclo comienza cuando Armijo presiona el botón de pánico (cuando la temperatura alcanza los $x^\circ K$), se obtiene:

$$C_{Ax}(x) = \frac{E[\text{costo ciclo}]}{E[\text{duración ciclo}]} = \frac{C + M\alpha(x)}{\frac{x}{\mu} + \frac{1}{\mu}\alpha(x)} = \frac{\mu(C + M\alpha(x))}{x + \alpha(x)}$$

5. Para encontrar la política óptima se debe obtener el valor $\bar{x}$ tal que:

$$C_{Ax}(\bar{x}) = \min_{0<x<B}\{C_{Ax}(x)\}$$

Y se debiese seguir la siguiente política:

- Si $C_{NA} \leqslant C_{Ax}(\bar{x})$ entonces Armijo nunca debe apretar el botón de pánico.
- Si $C_{NA} > C_{Ax}(\bar{x})$ entonces Armijo debe apretar el botón de pánico cuando la temperatura alcance los $\bar{x}°K$.

Problema 3

Un puente Browniano es un proceso estocástico continuo cuya distribución es la de un proceso de Wiener (movimiento Browniano) condicional en que $B(0) = B(1) = 0$.

De esta forma, $\{Z(t), t \geq 0\}$ puede escribirse como:

$$Z(t) = B(t) - tB(1)$$

En que $\{B(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar.

De esta forma $\{X(t), t \geq 0\}$ se puede escribir como:

$$X(t) = (t+1)\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right) - \left(\frac{t}{t+1}\right)B(1)\right]$$

Para ver que $X(t)$ es un movimiento Browniano estándar, calculemos su esperanza, varianza y covarianza. Es claro además que sigue una distribución normal, ya que $B(t)$ y $B(1)$ se distribuyen $N(0,t)$ y $N(0,1)$ respectivamente y, en consecuencia, $X(t)$ tiene distribución normal ya que es una combinación lineal de v.a. normales.

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= (t+1)\left[E\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right)\right] - \left(\frac{t}{t+1}\right)E[B(1)]\right] \\
&= (t+1)\left[0 - \left(\frac{t}{t+1}\right)0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V[X(t)] &= (t+1)^2 V\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right) - \left(\frac{t}{t+1}\right)B(1)\right] \\
&= (t+1)^2\left[V\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right)\right] + V\left[\left(\frac{t}{t+1}\right)B(1)\right] - 2Cov\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right), \left(\frac{t}{t+1}\right)B(1)\right]\right] \\
&= (t+1)^2\left[\frac{t}{t+1} + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{t+1}\right)Cov\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right), B(1)\right]\right] \\
&= (t+1)^2\left[\frac{t}{t+1} + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{t+1}\right)^2\right] \\
&= (t+1)^2\left[\frac{t}{t+1} - \left(\frac{t}{t+1}\right)^2\right] \\
&= t(t+1) - t^2 \\
&= t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov[X(t), X(s)] &= Cov\left[(t+1)\left(B\left(\frac{t}{t+1}\right) - \left(\frac{t}{t+1}\right)B(1)\right), (st+1)\left(B\left(\frac{s}{s+1}\right) - \left(\frac{s}{s+1}\right)B(1)\right)\right] \\
&= (t+1)(s+1)\left[Cov\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right), B\left(\frac{s}{s+1}\right)\right] - \frac{s}{s+1}Cov\left[B\left(\frac{t}{t+1}\right), B(1)\right]\right. \\
&\qquad \left. - \frac{t}{t+1}Cov\left[B(1), B\left(\frac{s}{s+1}\right)\right] + \frac{t}{t+1}\cdot\frac{s}{s+1}Cov[B(1), B(1)]\right] \\
&= (t+1)(s+1)\left[\text{mín}\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} - \frac{s}{s+1}\cdot\frac{t}{t+1} - \frac{t}{t+1}\cdot\frac{s}{s+1} + \frac{t}{t+1}\cdot\frac{s}{s+1}\right] \\
&= (t+1)(s+1)\left[\text{mín}\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} - \frac{s}{s+1}\cdot\frac{t}{t+1}\right] \\
&= (t+1)(s+1)\,\text{mín}\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} - st
\end{aligned}
$$

Pero es claro que:

$$
\text{mín}\{t, s\} = s \Leftrightarrow \text{mín}\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} = \frac{s}{s+1}
$$

Sin perder generalidad, supongamos $s < t$:

$$
\begin{aligned}
Cov[X(t), X(s)] &= (t+1)(s+1)\,\text{mín}\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} - st \\
&= (t+1)(s+1)\frac{s}{s+1} - st \\
&= (t+1)s - st \\
&= s \\
&= \text{mín}\{t, s\}
\end{aligned}
$$

Por lo que es ahora claro que $\{X(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar.

Francisco Uribe
fruribe@dcc.uchile.cl