

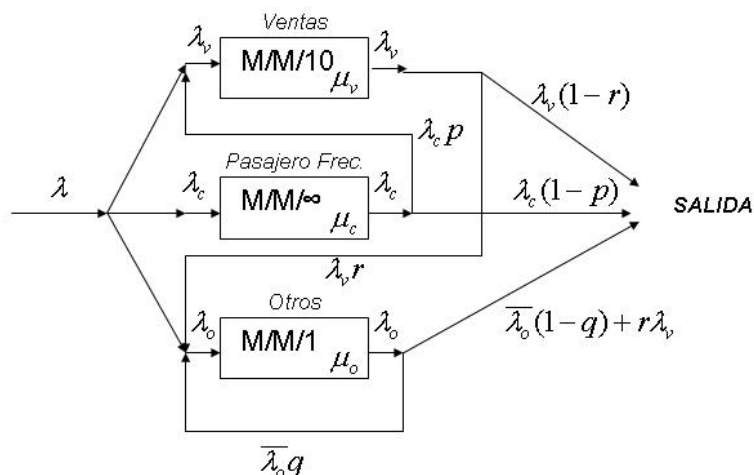


Clase Auxiliar 9

Teoría de Espera
24 de Octubre de 2007

Problema 1

1. El sistema se muestra en la siguiente figura.



Las tasas efectivas y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tipo Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
Ventas	$M/M/10$	λ_v	$\lambda f_v + p\lambda f_c$	$\lambda_v < 10\mu_v$
Pasajero Frecuente	$M/M/\infty$	λ_c	λf_c	Siempre $\exists$
Otros	$M/M/1$	λ_o	$r(\lambda f_v + p\lambda f_c) + \frac{\lambda f_o}{1-q}$	$\lambda_o < \mu_o$

En lo que sigue, denotamos por π^S a las probabilidades estacionarias del subsistema S , que se calculan de acuerdo a las ecuaciones de balance y normalización conocidas, y suponemos que se cumplen las condiciones de régimen estacionario.

2. Descuento promedio:

$$D = w \frac{L}{\lambda}$$

En que L es el número promedio de llamadas en el sistema:

$$L = L_v + L_c + L_o$$

L_v es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/10$ con tasa de entrada λ_v y tasa de atención de un servidor de μ_v .

L_c es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/\infty$ con tasa de entrada λ_c y tasa de atención de un servidor de μ_c .

L_o es el número promedio de llamadas en un sistema $M/M/1$ con tasa de entrada λ_o y tasa de atención de un servidor de μ_o .

3. La condición es:

$$\sum_{i=11}^{\infty} (i-10)\pi_i^{Ventas} + \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)\pi_i^{Otros} < 10$$

4. ■ Suponiendo que $\sum_{i=11}^{\infty} (i-10)\pi_i^{Ventas} < 10$, pero que la meta anterior no se cumple, sí puede ser útil contar con un telefonista adicional en el módulo *Otros*, porque el largo promedio del número de clientes con llamada en espera en este módulo se reduciría al de una $M/M/2$, que es menor al de una $M/M/1$.
- El número promedio de clientes que finalizan su atención por unidad de tiempo en el módulo *Otros*, al cumplirse la condición de régimen estacionario, no depende de las tasas de atención, sino de parámetros exógenos del sistema (tasas de entrada), por lo tanto, ninguna de las dos medidas es útil.

5.

$$I = \frac{\sum_{i=0}^9 (10-i)\pi_i^{Ventas}}{10}$$

6. Sea P_d la probabilidad de que el supervisor encuentre al menos un telefonista desocupado en una visita y, por lo tanto, registre una *observación*. Se tiene que:

$$P_d = \pi_0^{Otros} + \sum_{i=0}^9 \pi_i^{Ventas} - (\pi_0^{Otros}) \left(\sum_{i=0}^9 \pi_i^{Ventas} \right)$$

Luego, la probabilidad de que haga un sugerencia es:

$$P(\text{Sugerencia}) = \sum_{k=3}^{12} \binom{12}{k} P_d^k (1-P_d)^{12-k}$$

7. Actualmente, la probabilidad de que un cliente cualquiera que accede al módulo *Ventas* deba esperar es:

$$P_a = \sum_{i=10}^{\infty} \pi_i^{Ventas}$$

Si se agregan X nuevas telefonistas, atendiendo a la misma tasa, se tendría una nueva probabilidad P'_a igual a:

$$P(X) = \sum_{i=10+X}^{\infty} \pi_i^{Ventas}$$

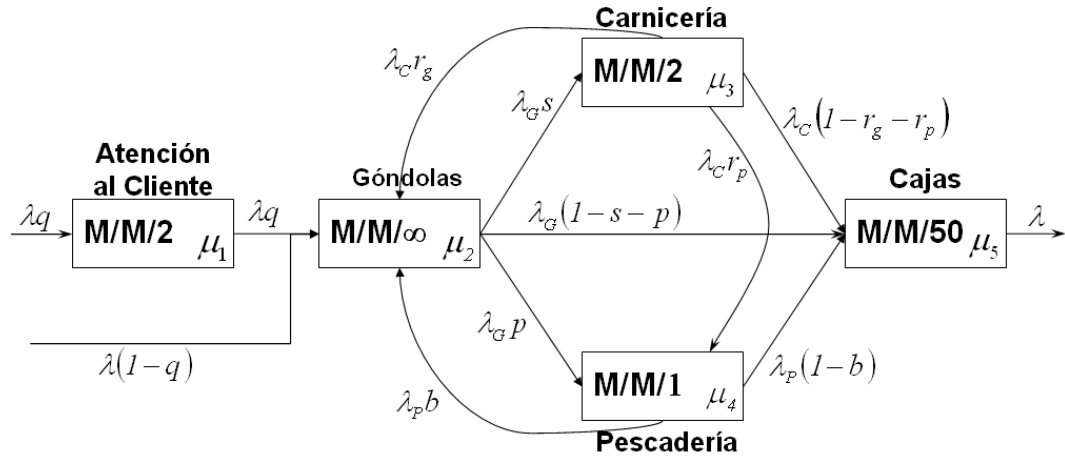
Luego, basta encontrar X^* tal que:

$$X^* = \text{Min}\{X : P(X) \leq \frac{P_a}{2}\}$$

Problema 2

1. La dinámica de los clientes en el supermercado puede ser modelada según se muestra en la figura.

Las tasas efectivas de entrada a cada subistema y las condiciones para la existencia de estado estacionario se muestran en la siguiente tabla:



Subsistema	Tasa	Tasa efectiva	Condición de estacionariedad
Atención al Cliente	λ_{AC}	λq	$\lambda_{AC} < 2\mu_1$
Góndolas	λ_G	$\frac{\lambda}{1 - r_g s - bp - br_p s}$	
Carnicería	λ_C	$\frac{s\lambda}{1 - r_g s - bp - br_p s}$	$\lambda_C < 2\mu_3$
Pescadería	λ_P	$\frac{\lambda(p + r_p s)}{1 - r_g s - bp - br_p s}$	$\lambda_P < \mu_4$
Cajas	λ_{CA}	λ	$\lambda_{CA} < 50\mu_5$

Estas tasas se obtienen resolviendo el sistema conformado por:

$$\begin{cases}
 \lambda_G &= \lambda + r_g \lambda_C + b \lambda_P \\
 \lambda_C &= s \lambda_G \\
 \lambda_P &= p \lambda_G + r_p \lambda_C
 \end{cases}$$

- Utilizando la ecuación de Little para calcular W a partir de L en los sistemas con un número infinito de servidores, y considerando sólo el tiempo de “servicio” en las góndolas ($M/M/\infty$) se tiene:

$$W_{AC} = \frac{2\rho}{\lambda_{AC}(1-\rho^2)} \quad \rho = \frac{\lambda_{AC}}{2\mu_1}$$

$$W_G = \frac{1}{\mu_2}$$

$$W_C = \frac{2\rho}{\lambda_C(1-\rho^2)} \quad \rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_3}$$

$$W_P = \frac{\rho}{\lambda_P(1-\rho)} \quad \rho = \frac{\lambda_P}{\mu_4}$$

$$W_{CA} = \frac{1}{\mu_5} + \frac{2\rho\lambda_{CA}^{49}\pi_0}{(1-\rho^2)\mu_5^{50}50!} \quad \rho = \frac{\lambda_C}{50\mu_5}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{49} \frac{\lambda_{CA}^n}{\mu_5^n n!} + \frac{\lambda_{CA}^{50}}{\mu_5^{50} 50! \left(1 - \frac{\lambda_{CA}}{50\mu_5}\right)} \right]^{-1}$$

3. El tiempo que permanece en el restaurant un cliente que pasa por *Atención al Cliente* corresponde a:

$$W_{AC} + T_G$$

Donde $T_i \quad \forall i \in \{G, C, P, CA\}$ corresponde al tiempo que le resta a un cliente en el supermercado condicional en que acaba de entrar al subsistema i , mientras que el tiempo de permanencia para alguien que no pasa por el subsistema de *Atención al Cliente* es simplemente T_G .

El siguiente sistema de ecuaciones permite encontrar el valor de $T_i \quad \forall i \in \{G, C, P, CA\}$.

$$\left. \begin{aligned} T_G &= W_G + sT_C + pT_P + (1-s-p)T_{CA} \\ T_C &= W_C + r_gT_G + r_pT_P + (1-r_g-r_p)T_{CA} \\ T_P &= W_P + bT_G + (1-b)T_{CA} \\ T_{CA} &= W_{CA} \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$T_G = \frac{W_G + sW_C + W_{CA}(s(1-r_p-r_g) + 1-s-p + (p+r_p s)(1-b)) + W_P(p+r_p s)}{1-r_g s - b(p+r_p s)}$$

4. La máxima reduccción del tiempo en el sistema que se puede lograr se obtiene cuando todos los subsistemas pasan a ser $M/M/\infty$. De esta forma los nuevos tiempos en cada subsistema pasan a ser:

$$W_{AC} \longrightarrow W'_{AC} = \frac{1}{\mu_1}$$

$$W_C \longrightarrow W'_C = \frac{1}{\mu_3}$$

$$W_P \longrightarrow W'_P = \frac{1}{\mu_4}$$

$$W_{CA} \longrightarrow W'_{CA} = \frac{1}{\mu_5}$$

Nótese que ya que se está considerando un cliente que no pasa por *Atención al Cliente* no es necesario modificar este subsistema.

Con estos nuevos valores, el tiempo que demora un cliente que no pasa por *Atención al Cliente*, en promedio en el largo plazo, es:

$$T'_G = \frac{W_G + sW'_C + W'_{CA}(s(1 - r_p - r_g) + 1 - s - p + (p + r_ps)(1 - b)) + W'_P(p + r_ps)}{1 - r_gs - b(p + r_ps)}$$

Por lo que la máxima reducción posible corresponde a:

$$T_G - T'_G = \frac{s(W_C - W'_C) + (W_{CA} - W'_{CA})(s(1 - r_p - r_g) + 1 - s - p + (p + r_ps)(1 - b)) + (W_P - W'_P)(p + r_ps)}{1 - r_gs - b(p + r_ps)}$$