Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 9

Teoría de Espera

24 de Octubre de 2007

Problema 1

El *Call center* de una aerolínea, que funciona las 24 horas del día, ofrece 3 opciones a la llamada de clientes: *Ventas*, *Pasajero frecuente* y *Otros*. De acuerdo a información histórica, el departamento de operaciones ha modelado la entrada de llamadas como un proceso de Poisson de tasa λ. Se sabe que una fracción f_v de las llamadas accede al módulo de *Ventas*, una fracción f_c accede al módulo de *Pasajero frecuente* y una fracción f_o al módulo *Otros*.

En el módulo de *Ventas* se cuenta con 10 telefonistas para atender los pedidos de clientes. Cuando todas están ocupadas, las llamadas entrantes quedan en una cola de espera y van siendo atendidas en orden de llegada a medida que las telefonistas se desocupan. El tiempo que demora la atención con una de estas telefonistas es modelado como una v.a. exponencial de parámetro μ_v. Después de esta atención, un cliente decidirá acceder al módulo *Otros* con probabilidad r, de lo contrario, terminará su llamada.

Al módulo de *Pasajero frecuente* los clientes ingresan a chequear el status de sus reservas y su acumulación de kilómetros. El reporte a una de estas llamadas se apoya internamente en una consulta a una base de datos, que gatilla como respuesta al cliente una voz pregrabada. Gracias a este sofisticado sistema, el módulo de *Pasajero frecuente* puede ser modelado como un conjunto de infinitos servidores y el tiempo de respuesta corresponde a una v.a. exponencial de parámetro μ_c. Después de este chequeo, un cliente decidirá acceder al módulo de *Ventas* con probabilidad p, de lo contrario, terminará su llamada. Cuando la llamada es transferida, accederá a hablar con una telefonista de *Ventas* si es que hay alguna desocupada o se agregará a la cola de ese módulo.

El módulo *Otros* está destinado a atender cualquier otro tipo de consultas. Para ello se cuenta con un único telefonista epecializado cuyo tiempo de atención puede ser modelado como una v.a. exponencial de parámetro μ_o. Las personas que llaman al *Call center* e ingresan directamente a este módulo decidirán con probabilidad q volver a ingresar al mismo módulo, como si hubiesen olvidado la infomación de la conversación anterior. Un cliente que accede desde el módulo *Ventas* sólo realizará una consulta en el módulo *Otros* y luego finalizará su llamada. Cuando el telefonista está ocupado atendiendo una llamada, las llamadas entrantes quedan en una cola de espera y van siendo atendidas en orden de llegada a medida que él se desocupa.

1. (1,5 pts.) Modele el sistema de *Call center* de la aerolínea como una red de colas. Para cada módulo, especifique el tipo de sistema, las tasas efectivas de entrada y de salida. Además, indique la condición de régimen estacionario y suponga que se cumple para las preguntas siguientes.
2. (0,7 pts.) El *Call center* cuenta con un acuerdo con su proveedor de servicio de telefonía. Por cada unidad de tiempo que dure la llamada de un cliente, el *Call center* recibirá un descuento de $\$m$ en su cuenta. ¿Cuál es el descuento promedio para el *Call center* por cada cliente que llama?
3. (0,5 pts.) El encargado de operaciones del *Call center* se ha fijado como meta que el promedio del número TOTAL de clientes con llamada en espera en el *Call center* (independiente del subsistema que se trate) sea menor que 10. ¿Qué condición se debe cumplir para que se logre esta meta?
4. - (0,6 pts.) Para cumplir la meta anterior, ¿sería útil contar con un telefonista adicional en el módulo *Otros*?

- Si se quiere aumentar el número promedio de clientes que finalizan su atención por unidad de tiempo en el módulo *Otros*, ¿sería útil contar con un telefonista adicional en dicho módulo? ¿Sería útil contar con una telefonista adicional en el módulo *Ventas*?

5. (0,7 pts.) Se define el *indicador ponderado de ociosidad* I como el número promedio de telefonistas desocupadas en el módulo *Ventas* sobre el número total de telefonistas de ese módulo. Entregue una expresión para I.

6. (1,0 pts.) Un supervisor de la aerolínea realiza una visita mensual al *Call center* (lugar donde operan todos los telefonistas). Si detecta que al menos uno de ellos está desocupado, registrará una *observación*. Si al cabo de las 12 visitas del año ha registrado al menos 3 *observaciones*, sugerirá al departamento de operaciones de la aerolínea disminuir la cantidad de telefonistas operando el *Call center*. ¿Cuál es la probabilidad de que el supervisor haga esta sugerencia?

7. (1,0 pts.) El encargado de operaciones estudia reducir por lo menos a la mitad la probabilidad de que un cliente cualquiera que accede al módulo *Ventas* deba esperar. Para ello, quiere agregar X nuevas telefonistas, cada una a un salario de S [\$/unidad de tiempo]. Plantee un problema que ayude al encargado a encontrar el valor X^* que permite alcanzar el objetivo a mínimo costo.

Problema 2

Clientes llegan a un supermercado según un proceso de Poisson de tasa λ[clientes/hora]. Una vez en el recinto, una fracción q de los clientes debe pasar por *atención al cliente* a devolver algún producto comprado en una visita anterior. Aquí son atendidos por alguno de los dos empleados en *atención al cliente*, que demoran un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro μ_1[1/hora] en atender a un cliente. Los clientes que han pasado por *atención al cliente* se dirigen luego a la zona de *góndolas*, donde realizarán sus compras. Los clientes que no pasaron por *atención al cliente* se dirigen directamente a las *góndolas* del supermercado.

En las *góndolas* los clientes demoran un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_2$[hora] seleccionando los productos que desean comprar. Después de haber pasado por las *góndolas*, los clientes se dirigen a la *carnicería* del supermercado con probabilidad s, donde son atendidos por alguno de los 2 carniceros, que tardan un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_3$[hora] en satisfacer los pedidos de los clientes; con probabilidad p se dirigen a la *pescadería*, lugar en que son atendidos por el único empleado disponible durante un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_4$[hora]. Los clientes restantes se dirigen directamente desde las *góndolas* hacia la zona de *cajas*[1].

Los clientes que acaban de salir de la *carnicería* vuelven a revisar las *góndolas* con probabilidad r_g (ya que aún no han comprado todo lo que necesitan), mientras que con probabilidad r_p se dirigen a la *pescadería*; el resto va directamente a pagar a las *cajas*[2].

Una fracción b de los clientes que acaban de salir de la *pescadería* vuelven a revisar las *góndolas* (ya que aún no han comprado todo lo que necesitan), mientras que el resto se dirige a la zona de *cajas*[2].

El supermercado cuenta con 50 cajas. Un cliente paga los productos en una de estas cajas, operación en la que demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_5$[hora], y luego abandona el supermercado.

1. (3,0 pts) Modele la situación descrita como una red de colas, indicando el modelo que ocupará para cada sistema y los parámetros asociados. Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema. ¿Cuál es la condición para la existencia de régimen estacionario?

2. (0,5 pts) En estado estacionario, ¿cuál es el tiempo esperado desde que una persona entra hasta que sale de cada subsistema?

3. (1,5 pts) Sin utilizar la fórmula de Little y asumiendo conocidos los valores de la parte anterior, ¿cuánto demora, en promedio en el largo plazo, un cliente que pasa por *atención al cliente* desde que llega hasta que sale del supermercado? ¿y un cliente que no pasa por *atención al cliente*?

---

[1] $s + p < 1$.

[2] Note que en una visita al supermercado un cliente puede pasar más de una vez por la *carnicería* y por la *pescadería*. Además, $r_g + r_p < 1$.

Indicación: Puede ser útil plantear un sistema de ecuaciones en que las variables sean el tiempo que le resta a un cliente en el supermercado condicional en el subsistema al que acaba de ingresar dicho cliente.

4. (1,0 pto) Si se le permite contratar cualquier cantidad de empleados para que trabajen en el supermercado, ¿cuál es la máxima reducción que se puede lograr del tiempo que un cliente pasa en el supermercado? Considere un cliente que no pasa por *atención al cliente*.