Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

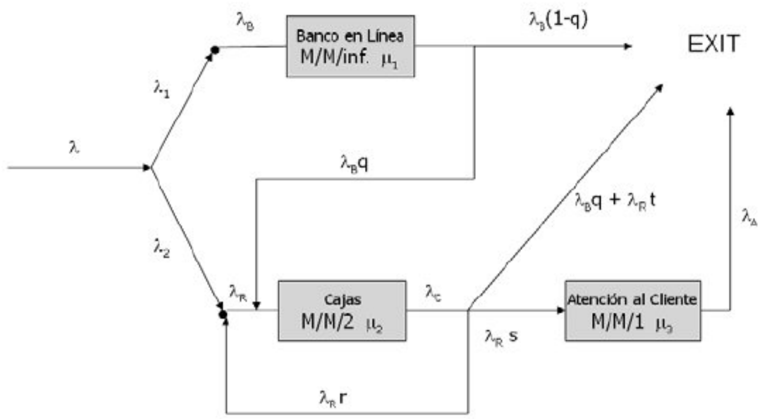
IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Solución Clase Auxiliar 8

Teoría de Espera
17 de Octubre de 2007

Problema 1

1. El sistema se muestra en la siguiente figura.



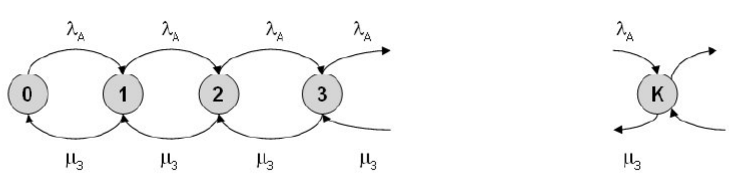
Donde la tasa λ_R representa a los clientes que entran a las Cajas y pueden entrar al reflujo y es igual a:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_2}{1-r}$$

De esta forma se tiene que las tasas efectivas y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor	CRE
Banco en Línea	λ_B	λ_1	Siempre $\exists$
Cajas	λ_C	$\lambda_1 q + \frac{\lambda_2}{1-r}$	$\lambda_C < 2\mu_2$
Atención al Cliente	λ_A	$\frac{\lambda_2 s}{1-r}$	$\lambda_A < \mu_3$

2. Para determinar la tasa de atencion μ_3 debemos centrarnos en el sistema de Atención al Cliente. A dicho subsistema llegan clientes con tasa λ_A, y además sabemos que el **K %** del tiempo el bombero está ocupado, es decir, en el largo plazo se tiene que $\Pi_0 = 1 - K$, para la siguiente cadena.



Para esta cadena se tiene que:

$$\Pi_0 = 1 - \frac{\lambda_A}{\mu_3} = 1 - K \qquad \Longrightarrow \mu_3 = \frac{\lambda_B}{K}$$

3. Los tiempos medios de espera en cada subsistema son:

$$W_B = \frac{1}{\mu_1} \qquad W_C = \frac{2\rho_C}{\mu_2(1-\rho_C^2)} \quad W_A = \frac{\rho_B}{\mu_3(1-\rho_B)}$$

donde $\rho_C = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ y $\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_3}$

Luego la esperanza del tiempo que permanece una entidad dentro del banco, si ingresó al sistema por Cajas está dada por:

$$E_C = \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C)r^{i-1}t + \sum_{i=1}^{\infty}(iW_C + W_A)r^{i-1}s = \frac{W_C + sW_A}{1-r}$$

Una manera alternativa y más simple de obtener el resultado anterior es plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

Se define T_i como el tiempo que resta desde que una entidad ingresa al subsistema $i \in \{B, C, A\}$ hasta que se retira del banco, se define además $\tau_i = E(T_i)$.

$$\begin{aligned} E(T_B) &= E(T_B\,|B \to B)p_{BB} + E(T_B\,|B \to C)p_{BC} + E(T_B\,|B \to A)p_{BA} \\ &= (W_B + \tau_B)\cdot 0 + (W_B + \tau_C) + W_B \cdot (1-q) \\ &= W_B + q\tau_C \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned} \tau_B &= W_B + q\tau_C \\ \tau_C &= W_C + s\tau_A + r\tau_C \\ \tau_A &= W_A \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $\tau_C = \frac{W_C + sW_A}{1-r}$.

4. El tiempo medio total de permanencia en el sistema, se pued obtener utilizando Little: $W_T = \frac{L_T}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Donde $L_T = L_B + L_C + L_A$, y:

$$L_B = \frac{\lambda_B}{\mu_1} \qquad W_C = \frac{2\rho_C}{(1-\rho_C^2)} \quad W_A = \frac{\rho_B}{(1-\rho_B)}$$

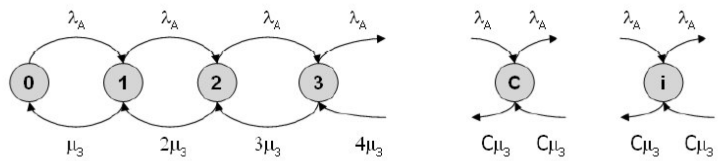
Luego si se busca minimar el tiempo de espera en las Cajas, el caso extremo es cuando este subsistema se transforma en un autoservicio donde se tendría que que $L'_C = \frac{\lambda_C}{\mu_2}$. Luego con este valor, es posible calcular nuevos L'_T y y W'_T, y la cota pedida es:

$$\text{Cota} = W_T - W'_T$$

5. Actualmente la fracción de clientes que llega a Atención al Cliente y debe esperar, es igual a la fracción del tiempo que el funcionario está ocupado, es decir, $(1 - \Pi_0) = K$.

Al agregar más funcionarios el sistema sería de la forma M/M/C, luego debemos determinar la cantidad C tal que [1]: $\sum_{i=C}^{\infty} \Pi_i = \frac{K}{2}$. Donde las probabilidades estacionarias son las de la siguiente cadena:

[1] En estricto rigor se debería tomar el cajón superior del mínimo valor de C que satisfaga esta condición



donde:

$$\Pi_i = \frac{\lambda_A^i}{i!\mu_3^i}\Pi_0 \quad \forall i = 0, 1, ..C-1 \qquad \Pi_i = \frac{\lambda_A^i}{C!C^{i-C}\mu_3^i}\Pi_0 \quad \forall i = C, C+1, .. \qquad \sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i = 1$$

Problema 2

1. Para esta primera parte debemos obtener el tiempo de espera de las cuatro configuraciones:

   - Política Actual: Este sistema se trata de una cola M/M/2 con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$. Para dicho sistema se tiene que:

   $$L_{act} = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \qquad W_{act} = \frac{2\rho}{1-\rho^2}\cdot\frac{1}{\lambda_C}$$

   - Política a: Corresponde a una M/M/1 con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$. Luego:

   $$L_a = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_a = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\lambda_C}$$

   - Política b: Este caso corresponde a dos colas M/M/1 con $\rho = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ cada una. Para ver el tiempo promedio de los clientes en el sistema, nos centramos en una de ellas:

   $$L_b = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_b = \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{2}{\lambda}$$

   - Política c: En esto punto, basta con notar que esta configuración, en términos de medidas de efectividad, es equivalente a la política actual. Aunque puede ser que los clientes se atiendan en otro orden las configuraciones son equivalentes. Luego:

   $$W_c = W_{act}$$

   De lo anterior se tiene que:

   $$W_c = W_{act} = \frac{1}{1+\rho}W_b \qquad W_b = 2W_a \qquad W_c = W_{act} = \frac{2}{1+\rho}W_a$$

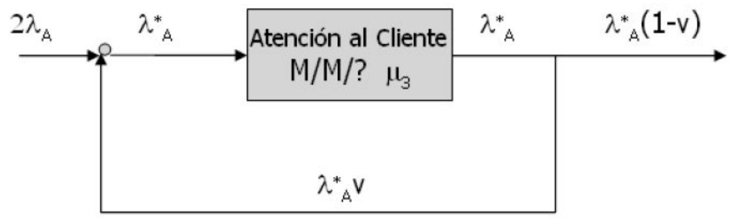
   De lo que se concluye que:

   $$W_b > W_{act} = W_c > W_a$$

   Luego la política más eficiente es la Política a.

2. A pesar de que disminuya el tiempo de espera en el sistema de Cajas, esto no afecta las tasas efectivas de este sistema y por ende tampoco las tasas efectivas del sistema de Atención al Cliente, luego si ahora el sistema no colapsa las inquietud de Armijo es infundada, y las propuestas de mejora son absolutamente innecesarias.

3. Aislando el sistema de Atención al Cliente, la nueva sutuación es la siguiente:



Donde

$$\lambda_A^* = \frac{2\lambda_A}{1-v}$$

Luego si se se tienen C funcionarios en este sistema para que el sistema no colpase se debe tener que:

$$\lambda_A^* < C\mu_3$$

Luego se deben encontrar el mínimo valor de C que satisfaga esta condición.