



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 7

Preparación Control 2
3 de Octubre de 2007

Problema 1, Control 2 Primavera 2005

Parte A

1. (2.0 pts.) En el problema de la ruina del jugador, para $p = \frac{1}{2}$, calcule el número esperado de apuestas hasta que concluye el juego, partiendo desde una fortuna inicial i .

Parte B

El número de trabajos que llegan al final de cada día a un centro de procesamiento sigue una distribución de Poisson de parámetro λ . El centro sólo tiene espacio para N trabajos. Los trabajos que llegan tal que se sobrepasa esta capacidad son retirados del centro (no quedan trabajos en espera por ser procesados).

Los trabajos recibidos se empiezan a procesar al comienzo del día siguiente. Independiente de los demás y de cuántos días lleva en el centro, un trabajo es terminado de procesar durante el día con probabilidad p . De lo contrario, se mantendrá en el centro y seguirá siendo procesado al día siguiente.

Los trabajos que se han terminado de procesar son despachados del centro al final de cada día (antes de aceptar nuevos trabajos).

2. (2.0 pts.) Modele el número de trabajos al inicio del día en el centro de procesamiento como una cadena de Markov. Clasifique sus estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.
3. (2.0 pts.) El centro de procesamiento *NY Fenix* funciona de acuerdo al sistema anterior, con M días funcionando, $M \gg 0$. *Fenix Rolland*, uno de sus empleados, dice haber estudiado el sistema durante este tiempo y postula que $\mu_{ii} = \mu, \forall i$, en que μ_{ii} denota el tiempo promedio que el sistema demora en regresar al estado i habiendo salido desde este estado.
 - Basado en el postulado de *Fenix Rolland*, ¿Qué valor esperaría usted para μ ?
 - Explique cómo probaría la veracidad o falsedad del postulado de *Fenix Rolland*. En particular, qué relación debiera existir entre λ y p para que sean consistentes con el postulado de *Fenix Rolland*.

Problema 2, Control 2 Primavera 2005

Parte A

A una tienda que comercializa sólo 2 productos, *Tipo A* y *Tipo B*, llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa λ [Clientes/día]. De acuerdo a los registros históricos de la tienda se sabe que estos clientes se comportan de la siguiente forma:

- Con probabilidad p_A un cliente demanda una unidad del producto de *Tipo A*, independientemente de si demanda o no unidades del producto de *Tipo B*.

- Con probabilidad p_B un cliente demanda una unidad del producto de *Tipo B*, independientemente de si demanda o no unidades del producto de *Tipo A*.
- Si un cliente demanda una unidad de cada producto, compra sólo si hay stock de los dos, es decir, compra una unidad de *Tipo A* y una unidad de *Tipo B* o se retira del local sin comprar.

La tienda tiene como política de reposición de inventario hacer un pedido a su proveedor cada vez que el stock de uno de los 2 tipos de productos cae a R_A y R_B unidades para productos *Tipo A* y *B* respectivamente y no haya un pedido en curso. El proveedor abastece a la tienda sólo en el(los) tipo(s) de producto(s) que esté(n) bajo la cantidad umbral de pedido (R_A y R_B), hasta quedar con un stock de Q_i unidades para el producto *Tipo i*, $i \in \{A, B\}$ si el producto *Tipo i* es abastecido en ese pedido ($R_A < Q_A, R_B < Q_B$). Considere que el proveedor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu}$ [días] en abastecer cualquier pedido de la tienda medido a partir desde que recibe la orden ¹. Los productos entregados por el proveedor quedan inmediatamente disponibles para su venta al público.

Considere que inicialmente en la tienda hay $(R_A + 1)$ productos *Tipo A* y $(R_B + 1)$ productos *Tipo B*.

1. (3,0 ptos.) Modele el inventario de la tienda como una cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique claramente estados y tasas de transición. ¿Bajo qué condiciones existen probabilidades estacionarias para esta cadena? Plantee el sistema de ecuaciones que permite obtenerlas.

El costo de poner un pedido es $\$C_P$ y el costo de comprar una unidad de producto de *Tipo i* es $\$C_i$. Sea $\pi_{a,b}$ la fracción de tiempo promedio que en la tienda hay un stock de a unidades de producto de *Tipo A* y b unidades de producto de *Tipo B* en el largo plazo. Asumiendo conocidos los valores de $\pi_{a,b} \quad \forall(a, b)$, responda:

2. (1,0 pto.) ¿Cuánto se espera que pague la tienda a su proveedor por unidad de tiempo en el largo plazo?
3. (0,5 pto.) ¿Cuántos productos de *Tipo A* se espera vender por unidad de tiempo en el largo plazo? ¿Cuántos de *Tipo B*?
4. (0,5 ptos. BONUS) ¿Cuál es el stock promedio de cada producto en el largo plazo?

Parte B

Considere ahora un sistema más simplificado en que todo cliente que llega de acuerdo al proceso de Poisson de tasa λ [Clientes/día] demanda una unidad de cada producto y compra sólo si existe stock disponible de ambos, de lo contrario se retira indignado.

La tienda no pone órdenes por producto. Simplemente, el proveedor vendrá cada un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$ [días] y agregará una unidad de cada producto al inventario, independiente del nivel en que éste se encuentre.

5. (1,5 ptos.) Si el estado inicial era de 0 unidades de producto *A* y 1 unidad de producto *B*, encuentre el número esperado de clientes por unidad de tiempo que en el largo plazo se retiran indignados de la tienda.

Problema 3, Control 2 Primavera 2004 (continuación clase pasada...)

Al aeropuerto de Oregon llegan aviones de sólo dos líneas aéreas, que realizan una ruta local de alto tráfico: L.A. Airlines y Armijo United. Los aviones de L.A. Airlines demoran exactamente τ_L horas en cubrir la ruta, mientras que los de Armijo United lo hacen en τ_A horas, con $\tau_A > \tau_L$. Además se sabe que el tiempo entre arribos de los aviones al aeropuerto de Oregon, son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro μ_L y μ_A , respectivamente. Por otro lado la capacidad de todos los aviones de ambas compañías es de R pasajeros.

Los pasajeros que requieren realizar el viaje por esta ruta local, llegan al aeropuerto según un Proceso de Poisson de tasa λ [pasajeros/hora] y se ubican en una cola única con acceso directo a la loza del aeropuerto. Cada vez que llega un avión, cada uno de pasajeros en la fila de espera deciden si abordará o no dicho avión.

¹Note entonces que si bien una orden se pone cuando uno de los productos cae al nivel $R_i, i \in \{A, B\}$, en el instante que llega el proveedor a la tienda, puede haber reabastecimiento de ambos productos.

Se sabe que si el avión es de L.A. Airlines todos los pasajeros esperando tendrán intenciones de abordarlo. Por otro lado, si es de Armijo United cada uno de los pasajeros de manera independiente tendrá intenciones de tomar el vuelo con probabilidad p , o decidirá esperar a un próximo avión con probabilidad $1 - p$.

Los pasajeros que desean viajar en un vuelo determinado subirán al avión respetando el orden de llegada y la capacidad de la aeronave. Por otra parte, los pasajeros que deciden no tomar el vuelo y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente.

Finalmente suponga que tanto el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un avión, como el tiempo de despegue son despreciables y que la sala de espera del aeropuerto cuenta con un espacio MUY grande.

1. (4.0 ptos.) Modele la cantidad de personas en el terminal aéreo como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles, las tasas involucradas, indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permite calcularlas.

Suponga ahora que los pasajeros tomen la decisión de abordar o no un vuelo de manera racional, es decir, que tomen dicha decisión en función del tiempo esperado de viaje.

2. (0.5 ptos) Explique el trade-off que enfrenta un pasajero en el i -ésimo lugar de la fila al decidir si desea o no abordar un avión de Armijo United.
3. (1.5 ptos.) En términos de los parámetros del problema, encuentre la estrategia óptima de decisión para el pasajero que se encuentra en el i -ésimo lugar de la fila de espera.