Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 5
Cadenas de Markov en Tiempo Discreto, 12 de Septiembre de 2007

Problema 1

En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. El problema es que actualmente se tiene M pacientes en el centro (y los equipos no llegarán hasta que no haya nadie).

Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1-p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

1. Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.[1]
2. Si el sistema tiene inicialmente M pacientes, ¿Cuál es la probabilidad que algún día tenga $M-1$?, Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos?. Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Ahora suponga que la instalación de los equipos ya se realizó, por lo que pueden llegar pacientes al centro hospitalario. Se sabe que la probabilidad que lleguen k pacientes en un día es q_k, con $k = 0, 1, 2....$ Además el centro sólo cuenta con C camas por lo que si llega una persona y no hay cama disponible, ésta es derivada a otro centro médico. Considere que una persona que ingresa al centro es internada al menos por 1 noche (no puede tener el alta sin una evaluación positiva del doctor que pasa revisión en la mañana).

3. Modifique su modelo para esta nueva situación y dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique los estados.

Problema 2

Considere una cadena de Markov con todos sus estados perteneciendo a una misma clase recurrente positiva que parte en el estado inicial 0. Sea m_i el número esperado de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de retornar a 0.

1. Usando la ecuación de Wald, muestre que:

$$m_j = \sum_i m_i P_{ij}, j > 0$$
$$m_0 = 1.$$

2. Relacionando los m_j con la proporción del tiempo que el sistema pasa en el largo plazo en el estado j para $j > 0$, vuelva a argumentar el resultado anterior.

[1] HINT: Calcule la probabilidad $\Pr[X(n) = r | X(n-1) = k]$, con $X(n)$ = cantidad de personas en el centro en la semana n.

Problema 3, Control 2 Primavera 2004

Se juega la final del campeonato shileno de futbol entre los equipos de San Felipe y Temuco. Este año, la sorprendente e imaginativa dirigencia de la ANFPE ha decidido implementar una nueva forma de definición de campeonato. Los equipos jugarán un partido tras otro hasta que alguno de los dos logre la suma de tres victorias consecutivas. Adicionalmente cada uno de los partidos de la final se definirá mediante lanzamientos penales en el caso de terminar en un empate. Esto significa que los únicos resultados posibles para cada partido son victoria para San Felipe o victoria para Temuco. Considere que la probabilidad de victoria (incluye definición a penales) de Temuco en cada partido es 0,6.

La dirigencia de la ANFPE, que espera llenar de publico cada uno de los partidos de la final, desea saber cual es el número esperado de partidos que se disputarán, de forma de decidir cuanto dinero se destinará a publicitar los encuentros.

1. Construya una cadena de Markov en tiempo discreto que le permita calcular el número esperado de encuentros. Clasifique los estados de esta cadena e identifique sus clases.
2. En base a la cadena el punto anterior calcule el número esperado de partidos que se jugarán y la probabilidad que Temuco se titule campeón del futbol shileno.

Problema 4

Considere una población de N individuos, cada cual al inicio de cada período puede estar en 3 condiciones posibles: *infeccioso*, *infectado pero no infeccioso* o *no infectado*. Si un individuo no infectado se infecta durante un período será infeccioso durante el período siguiente e infectado pero no infeccioso desde el período subsiguiente en adelante. Durante cada período, cada uno de los $\binom{N}{2}$ pares de individuo *entra en contacto* con probabilidad p, independiente de los demás. Si un par entra en contacto y uno de los individuos del par es infeccioso y el otro no infectado, el no infectado se infectará (por lo que será infeccioso el período siguiente). Sean X_n e Y_n el número de individuos infecciosos y el número de no infectados, respectivamente, en el período n.

1. Si hay i individuos infecciosos al inicio de un período, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo no infectado particular se infecte en ese período?
2. ¿Es $\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.
3. ¿Es $\{Y_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.
4. ¿Es $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ una cadena de Markov? Si la respuesta es afirmativa, entregue sus probabilidades de transición.

Problema 5 (Propuesto)

Cada día uno de posibles n elementos son requeridos; el i-ésimo es requerido con probabilidad p_i, $i \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Estos elementos son arreglados permanentemente en una lista ordenada que es revisada de la siguiente forma: El elemento seleccionado es puesto al tope de la lista y todo el resto es rearreglado respetando su posición relativa.

1. Argumente que el estado de la lista de elementos puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto.
2. Para cualquier estado $i_1, \ldots, i_n$ (que es una permutación de $1, \ldots, n$) sea $\pi(i_1, \ldots, i_n)$ la probabilidad estacionaria de la cadena anterior. Argumente que:

$$\pi(i_1, \ldots, i_n) = P_{i_1} \cdot \frac{P_{i_2}}{1 - P_{i_1}} \cdots \frac{P_{i_{n-1}}}{1 - P_{i_1} - \cdots - P_{i_{n-2}}}$$