



Solución Clase Auxiliar 5

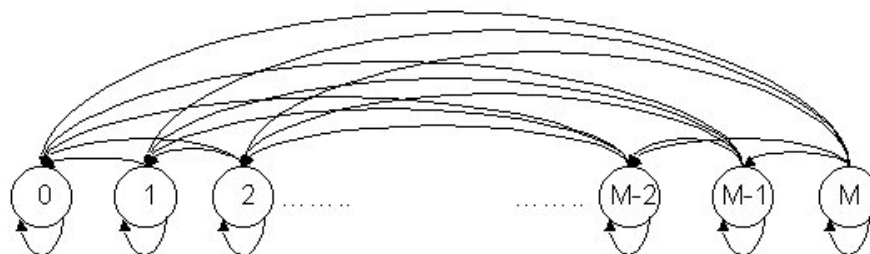
Cadenas de Markov en Tiempo Discreto, 12 de Septiembre de 2007

Problema 1

1. La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si me defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, M\}$.
- Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula¹:

$$P(i, j) = P(\text{ir del estado } i \text{ al estado } j) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} (1-p)^j & \text{si } M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$



Grafo Parte 1

- Existen $M+1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuesta cada una por uno de los M estados restantes. Recuerden que una clase esta compuesta por todos los estados comunicados² entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.
2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M-1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de periodos. Por esto se tiene que:

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por } M-1 \text{ en } i \text{ transiciones})$$

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en } M \text{ por } i-1 \text{ transiciones}) \cdot P(M, M-1)$$

¹Esto es equivalente a definir la matriz de transición P .

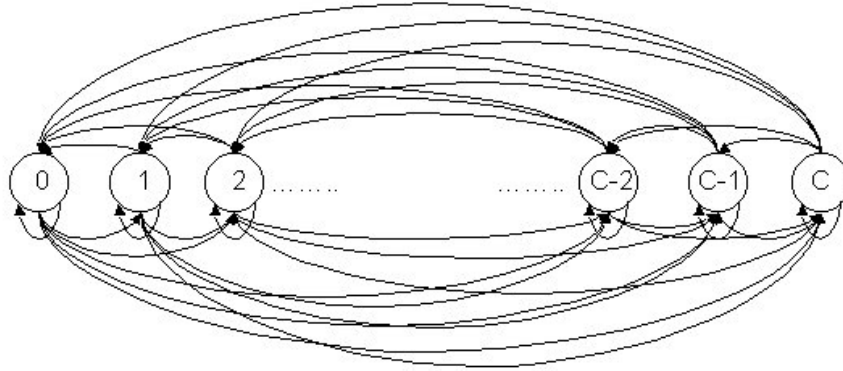
²Ver definición en apuntes del curso

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}$$

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1 - (1-p)^M}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergodica, sé que en el largo plazo con seguridad estare en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente esta compuesta por el estado 0, es que se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podran instalar los equipos.

3. En este caso se tiene un número C de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. De esta forma:



Grafo Parte 3

- El estado i Será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, C\}$.
- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i P(i, j | \text{Se mejoran } k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo;

$$P(i, j | \text{Se mejoran } k \text{ personas}) = P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas})$$

siempre y cuando $j - i + k \geq 0$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen más de } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i \left(\sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \right) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

Problema 2

1. Sea $X_{ij}(n)$ igual a 1 si la n -ésima transición que sale desde i ocurre hacia el estado j y cero en otro caso. Denotemos por N_i al número de períodos que la cadena pasa en el estado i antes de regresar al estado 0. Luego, para $j > 0$ se tiene:

$$m_j = E\left[\sum_i \sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)\right] = \sum_i E\left[\sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)\right]$$

Usando la ecuación de Wald:

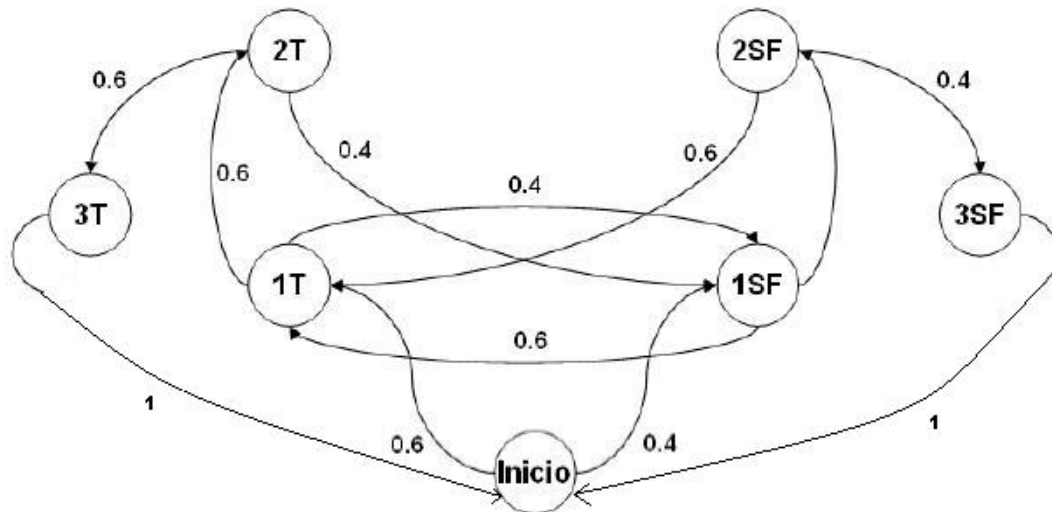
$$E\left[\sum_{n=1}^{N_i} X_{ij}(n)\right] = E[N_i]P_{ij} = m_i P_{ij}$$

2. Interpretando el tiempo entre visitas a 0 como un ciclo, los π_i correspondientes a la proporción del tiempo que el sistema pasa en el estado j en el largo plazo, satisfacen: $\pi_j = \frac{m_j}{\mu_{00}}$. Luego, de la relación de ecuaciones de estacionariedad $\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ se tiene para $j > 0$ que:

$$m_j = \sum_i m_i P_{ij}$$

Problema 3, Control 2 Primavera 2004

1. Existe más de una forma de responder. Modelamos según la siguiente cadena para usar el resultado obtenido en el problema 2.



Vemos que existe una única clase recurrente y aperiódica, conformada por todos los estados.

2. Nos piden cual es el numero esperado de visitas a estados transientes de esta cadena, partiendo del estado de inicio. Usando nuestra notación habitual tenemos que:

$$\begin{aligned}
m_{1T} &= m_I \cdot 0,6 + m_{1SF} \cdot 0,6 + m_{2SF} \cdot 0,6 \\
m_{1SF} &= m_I \cdot 0,4 + m_{1T} \cdot 0,4 + m_{2T} \cdot 0,4 \\
m_{2T} &= m_{1T} \cdot 0,6 \\
m_{2SF} &= m_{1SF} \cdot 0,4 \\
m_I &= 1
\end{aligned}$$

Una vez despejados estos valores, vemos que la respuesta que buscamos es:

$$E(partidos) = m_{1SF} + m_{1T} + m_{2SF} + m_{2T} + 1$$

Donde el uno adicional se cuenta por el partido final.

Resolviendo numéricamente se tiene:

$$E(partidos) = 1,69 + 2,02 + 0,68 + 1,21 + 1 = 6,6$$

Utilizando el mismo razonamiento vemos que para calcular la probabilidad que Temuco gane debemos resolver el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
f_I &= f_{1T} \cdot 0,6 + f_{1SF} \cdot 0,4 \\
f_{1T} &= f_{2T} \cdot 0,6 + f_{1SF} \cdot 0,4 \\
f_{1SF} &= f_{1T} \cdot 0,6 + f_{2SF} \cdot 0,4 \\
f_{2T} &= 0,6 + f_{1SF} \cdot 0,4 \\
f_{2SF} &= f_{1T} \cdot 0,6
\end{aligned}$$

La respuesta que buscamos es

$$f_I = 0,72$$

Problema 4

1. $\alpha_i = 1 - (1 - p)^i$
2. No.
3. No.
4. Sí, las probabilidades de transición en el caso $0 \leq k \leq j$ son $P(X_{n+1} = k, Y_{n+1} = j - k / X_n = i, Y_n = j) = \binom{j}{k} \alpha_i^k (1 - \alpha_i)^{j-k}$.

Problema 5

1. Es posible dado que un orden de la lista dado resume la información relevante para determinar cual será la evolución futura de la lista.
2. La probabilidad estacionaria puede ser interpretada de la siguiente forma: Cual es la probabilidad de, en el largo plazo, encontrar al sistema en un estado en particular $(i_1, \dots, i_n)$. Para que esto ocurra obligatoriamente la última transición de la cadena involucre haber escogido al elemento i_1 , de hay el término P_{i_1} . Por otro lado, para encontrar como segundo elemento a i_2 en la última transición en la que no se escogió a i_1 se debe haber escogido a i_2 . Al imponer esto surge el término $\frac{P_{i_2}}{1 - P_{i_1}}$.

Extendiendo el razonamiento vemos que existirá una transición a partir de la cual se escogerá exclusivamente elementos en el subconjunto $\{i_1, \dots, i_j\}$. Antes de esta transición, obligatoriamente se debe haber escogido a i_{j+1} para obtener el orden indicado. Como la elección se realiza solo entre los índices pertenecientes a $\{i_{j+1}, \dots, i_n\}$ el término $\frac{P_{i_{j+1}}}{1-P_{i_1}-\dots-P_{i_{j+1}}}$ aparece. Finalmente vemos que este razonamiento se extiende hasta el elemento i_{n-1} por cuanto la elección de este elemento entre i_n y i_{n-1} determina completamente el orden final de la lista.

Francisco Uribe
fruribe@dcc.uchile.cl