

Hola,

Algunos me han pedido, al finalizar la clase de hoy, que les envíe una explicación aclaratoria del ejemplo 3.5(A) del Ross (pag. 125). Se trata v.a. discretas independientes  $X_1, X_2, \dots$  donde interesa la aparición de patrones, tales como 0,1,0,1. Veamos los aspectos esenciales:

1. Se entiende que un patrón aparece en la tirada u observación  $n$  cuando el último elemento del patrón está en la posición  $n$ .
2. Dado un patrón fijo, decidido de antemano, la aparición de patrones es un proceso de renovación con retardo (discreto). Es claro que el tiempo (medido en número de observaciones  $X$  o de tiradas de una moneda) hasta que aparece por primera vez el patrón, es distinto (en general) del tiempo que transcurre entre dos apariciones sucesivas del patrón. Por otra parte, la v.a. número de tiradas (tiempo) que transcurren hasta un nuevo patrón depende exclusivamente de las  $X_k$  con  $k >$  instante del último patrón, las cuales son independientes, de manera que los sucesivos tiempos entre patrones son v.a. independientes e idénticamente distribuidas. Esto explica que tengamos un proceso de renovación con retardo.
3. Para determinar la tasa de ocurrencia del patrón (asintótica), se usa el resultado de que  $N(t)/t$  converge a  $1/E(T)$ , donde  $T$  es el tiempo entre renovaciones (entre dos apariciones sucesivas del patrón). Por otra parte, como la distribución es lattice ( $d=1$ ) se usa el Teorema de Blackwell (la probabilidad de una renovación en  $n$  es  $1/E(T)$ , cuando  $n \rightarrow$  infinito). Pero la probabilidad de una renovación en  $n$  es la probabilidad de observar el patrón en  $n$ , la cual no depende de  $n$  y es el producto de las probabilidades del tipo  $P(X_i = x_i)$ . Entonces el tiempo esperado entre apariciones del patrón es el recíproco de esa probabilidad.
4. El cálculo del tiempo esperado hasta la primera aparición del patrón es distinto y se basa en la idea de considerar el subpatrón al inicio, lo más largo posible, que esté contenido en la “cola” o término del patrón. En el ejemplo de Ross, el patrón es 0101, consideramos 01 al inicio, que está evidentemente a la cola de 0101. **Lo importante para que la idea funcione es que cuando se observa el patrón 01, el tiempo que falta hasta ver 0101 tiene la misma distribución que los tiempos entre patrones (es decir  $1/(p^2q^2)$ ).** Entonces, lo que falta hacer ahora es calcular el tiempo esperado hasta la primera aparición de 01 (problema más fácil). Pero, dado que 01 comienza en 0 y termina en 1, el tiempo entre patrones 01 y el tiempo hasta la aparición del primer 01 tienen la misma ley de probabilidad (porque no se puede aprovechar nada de una aparición previa del patrón). Entonces, el tiempo esperado hasta la primera aparición del patrón 01 es  $1/(pq)$ .
5. Finalmente, el tiempo esperado para la primera aparición de 0101 es la suma de los dos valores anteriores porque antes de ver 0101 necesariamente veremos 01.
6. El caso siguiente HTHHHTHH sigue la misma idea. Se escoge el subpatrón HTHH porque es el subpatrón más largo contenido en la cola de HTHHHTHH. Entonces la “parte difícil” se reduce a calcular el tiempo esperado hasta la primera aparición de HTHH. El procedimiento se vuelve a aplicar a HTHH y se detiene aquí porque no hay más simplificación posible.
7. La discusión anterior puede ser útil para comprender por qué no es posible escoger de cualquier manera el subpatrón inicial. Por ejemplo, si escogemos HT en lugar de HTHH, es cierto que antes de ver HTHHHTHH debemos ver HT pero, habiendo visto

HT, el tiempo que transcurre hasta que veamos HTHHHTHH **no** tiene la misma ley de probabilidad que el tiempo entre patrones HTHHHTHH y no sabemos que hacer. Lo mismo pasa si escogemos H o HTH.

8. En el caso HHHHH, el subpatrón mas largo (distinto del original) y contenido en la cola es HHHH, de manera que  $E(\text{hasta HHHHH}) = E(\text{hasta HHHH}) + E(\text{tiempo entre patrones HHHHH}) = E(\text{hasta HHHH}) + 1/p^5$ . Se vuelve aplicar la idea a HHHH para obtener  $E(\text{hasta HHHH}) = E(\text{hasta HHH}) + 1/p^4$ , etc.
9. En el ejemplo HTHTHHHTHT no hay más opción que HT, de momento que lo único aprovechable de la cola para ser usado como inicio es HT.
10. Cuando el patrón comienza distinto de cómo termina no hay nada especial que hacer y tenemos un proceso de renovación sin retardo.
11. El problema de la clase auxiliar (tiempo esperado hasta ---) es idéntico a HHH.