Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Felipe Castro, Francisco Uribe

TAREA 1

FECHA DE ENTREGA: 5 de Septiembre de 2007 antes del control
Entregar por separado Preguntas 1 a la 3 y Preguntas 4 a la 6.
La tarea debe ser entregada individualmente.

Problema 1

Un proceso de Poisson bi-dimensional es aquel cuyos eventos se pertenecen a $\mathbb{R}^2$ tal que:

- Para cualquier región del plano de área A el número de eventos en A se distribuye según un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot A$.
- El número de eventos en regiones disjuntas son independientes.

Considere un punto fijo r. Sea X la distancia entre r y el evento más cercano (utilizando norma euclidiana). Demuestre que:

1. $P[X > t] = e^{-\lambda \pi t^2}$
2. $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$
3. Sea R_i, la distancia desde un punto arbitrario hasta el i-ésimo evento más cercano a él ($R_0 = 0$).Muestre que:$\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2$ ($i \leq 1$) son variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas de tasa λ.

Problema 2

El famoso crack italiano **Christianno Bernotti** está de vuelta. Hace pocas semanas ha sido contratado por el temible equipo español *Los Galácticos* y se apronta a jugar su primer partido como titular ante la poderosa escuadra inglesa del *Archenal*.

Una vez en el partido, **Bernotti** tomará la pelota de fútbol según un proceso de Poisson de tasa λ [veces/minuto]. Dado que Bernotti es el delantero central, siempre estará cerca del pórtico rival cuando tome el balón. Así, cuando reciba la pelota podrá intentar *eludir a la defensa* con una probabilidad p o rematar al arco de *media distancia* en caso contrario. Cada remate de *media distancia* tendrá una probabilidad q_i de ser gol, donde i es el número de goles que **Bernotti** ha convertido hasta ese momento en el partido (inicialmente comienza con 0 goles). Debido al desgaste que le produce a Bernotti cada gol, q_i será decreciente en i, es decir, mientras más goles haya hecho será menos probable acertar un gol de media distancia.

En el caso que intente *eludir a la defensa*, el número de defensas que se interpondrán en su camino hacia al arco sigue una distribución F (donde F es una distribución de probabilidad discreta). Si llegan más de K defensas a marcarlo, de seguro perderá el balón y perderá la oportunidad de marcar el gol. Por el contario, si lleguan menos de K defensas, **Bernotti** de seguro los eludirá gracias a su increíble técnica y velocidad, pudiendo rematar a portería en un *mano a mano* con el arquero. La probabilidad de anotar en un *mano a mano* con el arquero es r.

El único que hará goles en *Los Galácticos* será **Bernotti**, ya que sus compañeros siempre prefieren que sea él quién intente batir el pórtico rival. Sea G(t) el proceso de conteo de los goles hasta el minuto t, responda:

1. ¿Cuál es la esperanza del tiempo transcurrido hasta el primer gol?

2. ¿Cuál es la esperanza del tiempo transcurrido hasta que se hacen n goles?

3. Si el primer gol ocurre en el minuto s. ¿Cuál es la esperanza del número de remates de *media distancia* que lleva Bernotti hasta ese momento?

4. ¿Cuál es es la probabilidad de que se hayan convertido dos goles antes del minuto t? Además, ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 goles hasta ese momento, sabiendo que los defensas se la han quitado m veces?

Durante el desarrollo del partido, en las tribunas preferenciales del estadio hay un vendedor de *sandwiches de traseraux*, un apetecido manjar de los fanáticos del futbol. El éxito del negocio está fuertemente ligado al resultado del partido. Se sabe que si en un partido *Los Galácticos* han convertido más de 2 goles, se venden sandwiches según un proceso de poisson de tasa λ_2 [sandwiches/minuto], mientas que si no se han convertido dos goles los tiempos entre ventas del apetecido manjar se distribuyen exponencialmente de tasa μ [sandwiches/minuto].

5. Considerando que el partido dura exactamente 90 minutos y no hay entretiempo ¿Cuántos sandwiches se espera vender en el partido, sabiendo que hubo exactamente 2 goles?

Problema 3

La vida útil de un automóvil es una variable aleatoria de distribución F. Un individuo tiene la política de cambiar su auto por uno nuevo cuando éste falla o cuando llega a una edad A. Sea $R(A)$ el valor de reventa de un auto de edad A, mientras que el valor de un auto que ha fallado es 0 independiente de su edad. Sea C_1 el costo de un auto nuevo y suponga que se debe incurrir en un costo adicional de C_2 si el auto se cambia porque falla.

1. Si un ciclo comienza cada vez que el individuo compra un auto nuevo, calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo.

2. Si el ciclo se define de manera que comienza cuando el auto en uso falla, calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo.

Problema 4

Considere sucesivos lanzamientos de una moneda que tiene probabilidad p de salir cara. Encuentre el número esperado de lanzamientos hasta que los siguientes patrones aparecen (C= cara, S= sello) :

1. A= CSCS

2. B= SCSS

Ahora suponga $p = \frac{1}{2}$.

1. Encuentre $P[A \text{ ocurra antes que } B]$.

2. Encuentre el número esperado de lanzamientos de hasta que ocurre A o B.

Problema 5

Un sistema de producción está conformado por 2 máquinas funcionando en serie. Cada una de estas máquinas trabaja sin fallar durante un tiempo exponencialmente distribuido de media λ. Una máquina que falla es reparada en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa μ. En estos casos, el sistema completo deja de funcionar, a pesar que la máquina que no ha fallado sigue trabajando porque los costos de setup son muy altos.

Suponiendo que ambas máquinas comienzan trabajando correctamente conteste las siguientes preguntas:

1. Calcule la esperanza del tiempo en que el sistema completo está funcionando, antes de la primera falla.
2. Calcule la esperanza del tiempo que el sistema demora en volver a funcionar correctamente.
3. Utilizando los resultados anteriores, calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo, definiendo un proceso de renovación alternante.

Suponga ahora que el tiempo que las máquinas funcionan correctamente sigue una distribución F_b, mientras que el tiempo que toma su reparación sigue una distribución F_m.

4. ¿Es válido utilizar un razonamiento análogo a lo realizado en el punto (3)? Justifique.
5. Calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo.

Problema 6

A un aeropuerto llegan pasajeros a la zona de embarque según un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t)$. Se sabe que los pasajeros pueden ser de dos tipos: *sospechosos* o *con buena presencia*. Cada pasajero tiene una probabilidad q_s de ser de tipo *sospechoso*, y una probabilidad $q_n = 1 - q_s$ de tener buena presencia.

La seguridad de la línea aérea ha dispuesto que una fracción de los pasajeros *sospechosos* y de los que tienen *buena presencia* tengan que someterse a una revisión para detectar eventuales terroristas. La selección de los pasajeros para este control es tal que con probabilidad $R_s(t)$ un pasajero de tipo *sospechoso* que llega en el momento t deberá someterse a la revisión, mientras que si es de tipo *buena presencia* esta probabilidad es $R_n(t)$.

La revisión de los pasajeros es instantánea, incurriéndose en un costo C por cada pasajero controlado. Además, se sabe que con seguridad el sistema de control detectará a un terrorista intentando abordar el avión, los que serán entregados a la justicia. Estudios de la CIA han determinado que una fracción B_s de los pasajeros que parecen *sospechosos* son terroristas, mientras que una fracción B_n de los pasajeros *con buena presencia* también son terroristas ($B_s > B_n$).

Los pasajeros aceptados en el control y aquellos que no tuvieron que someterse a revisión ingresan al salón VIP donde deben esperar hasta que salga el vuelo. El avión despega en un tiempo T con a lo más N pasajeros. La línea aérea incurre en un costo p por cada unidad de tiempo que un pasajero espera en el salón VIP por concepto de bebidas y entretenciones, además de un costo D por cada pasajero que estando en el salón VIP para abordar el vuelo no puede hacerlo por falta de espacio, en este caso, los pasajeros tienen todos la misma probabilidad de no poder abordar independiente del orden en que llegaron.

Por otra parte, la compañía sabe que si en el avión van k terroristas hay una probabilidad A_k que los terroristas secuestren la aeronave, lo que significa un costo en imagen valorado en X con $X >> C$.

1. Encuentre la distribución del proceso de llegadas al salón VIP.
2. Calcule el costo esperado por concepto de bebidas y entretenciones en el salón VIP.
3. Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas detectados en el control. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de los que están esperando en el salón VIP en el tiempo T?.
4. Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas que finalmente abordan a un vuelo.
5. Calcule el costo esperado total que deberá incurrir la línea aérea en un vuelo.