



## SOLUCIÓN CONTROL 1

### 10 de Septiembre de 2006

#### Problema 1

1. Notar que el proceso  $N_i(t)$  de llegada de clientes que demandan una entrada para la fila  $i$  puede ser visto como un Poisson, filtrado por la respectiva probabilidad  $p_i$ . Luego:

$$P_{k,i} = P(N_i(t_P + t_N) = k) = \frac{e^{-m(0,t_P+t_N)} m(0,t_P+t_N)^k}{k!},$$

donde  $m(0, t_P + t_N) = p_i(\int_0^{t_P} (\lambda + bt)dt + \int_{t_P}^{t_P+t_N} \lambda dt) = p_i(\lambda t_P + b \frac{t_P^2}{2} + \lambda t_N)$

Luego, la probabilidad  $Q_i$  de que la fila  $i$  sea problemática es:

$$Q_i = \sum_{k=0}^{[0,9C_i]-1} P_{k,i} + \sum_{k=C_i+\alpha_i}^{\infty} P_{k,i}$$

Sea  $X_i$  la v.a. que toma el valor 1 si la fila  $i$  es problemática y cero en caso contrario. Es claro que:

$$E(NF) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = \sum_{i=1}^M Q_i$$

Alternativamente, se puede utilizar directamente la definición de la esperanza para obtener la siguiente expresión:

$$E(NF) = \sum_{n=1}^M n \sum_{j=1}^{\binom{M}{n}} \left( \prod_{i \in A_{j,n}} Q_i \right) \left( \prod_{i \in A_{j,n}^C} (1 - Q_i) \right)$$

donde:  $A_{j,n} \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ ;  $A_{j_1,n} \cap A_{j_2,n} = \emptyset \quad \forall j_1 \neq j_2$ ;  $|A_{j,n}| = n$ ;  $A_{j,n}^C = \{1, 2, \dots, M\} / A_{j,n}$

2. Notar que la dinámica de atención del cajero puede ser interpretada como un proceso de renovación alternante (tipo ON-OFF), en que ON denota cuando el cajero está atendiendo y OFF cuando no. Luego, para un cliente que llega al teatro la probabilidad de encontrar al cajero atendiendo es:

$$P[\text{Encontrar al cajero atendiendo}] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{On en } t] = \frac{E[\text{Tiempo ON}]}{E[\text{Tiempo ON}] + E[\text{Tiempo OFF}]} = \frac{\mu}{\mu + r}$$

La utilidad esperada por cada show del teatro es entonces:

$$E(Ut) = \frac{\mu}{\mu + r} \left( \sum_{i=1}^M \lambda p_i T S_i \right) - \frac{r}{\mu + r} \lambda T K_{img} - WT - K_{op} T^2 + K_{sub}$$

Para encontrar el  $T$  que maximiza esta expresión, derivamos e igualamos a cero, obteniendo:

$$T^* = \frac{\frac{\mu}{\mu+r} \left( \sum_{i=1}^M \lambda p_i S_i \right) - \frac{r}{\mu+r} \lambda K_{img} - W}{2K_{op}}$$

Lo anterior es suficiente para efectos de corrección. No está demás notar que la función de utilidad esperada es una parábola cóncava ( $K_{op} > 0$ ) y que  $\frac{\mu}{\mu+r} \left( \sum_{i=1}^M \lambda p_i S_i \right) > \frac{r}{\mu+r} \lambda K_{img} + W$  para que el valor  $T^*$  sea positivo.

3. a) El proceso de conteo del número de veces que *Panorámicos* califica con nota 5 al teatro puede ser visto como un proceso de renovación (los tiempos entre eventos son variables iid). Para un proceso de renovación sabemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$  con probabilidad 1. Esto y además la condición  $q_5 > 0$  justifican que el amigo tiene la razón.
- b) Sean  $R_i$  la calificación de la revista al  $i$ -ésimo show y  $N = \text{Min}\{i : R_i = 5\}$ . Para  $k \geq 1$ , el puntaje acumulado hasta (inmediatamente después) que el teatro pasa a ser *Premium*( $k$ ) puede ser escrito como:

$$\text{Puntaje}_k = 2k \sum_{i=1}^N R_i$$

$N$  es un tiempo de parada relativo a los  $R_i$ , pues el evento  $\{N = n\}$  es independiente de  $R_i \ \forall i > n$ . Además,  $E(R_i) < \infty$  (directo de que las calificaciones posibles son un conjunto finito de enteros) y  $E(N) < \infty$  si  $q_5 > 0$  ( $N$  es una geométrica de parámetro  $q_5$ ). Luego, podemos utilizar la ecuación de Wald para calcular la sumatoria en la expresión anterior y se obtiene lo pedido:

$$E(\text{Puntaje}_k) = 2k \cdot E(N) \cdot E(R) = \frac{2k \sum_{j=1}^5 j q_j}{q_5}$$

- c) Sea  $N_5(t)$  el proceso que cuenta el número de veces que *Panorámicos* ha calificado con nota 5 al teatro hasta el instante  $t$ . Lo que se pide entonces es  $E(K_t/N_5(t_0) < 2)$ .

$$E(K_t/N_5(t_0) < 2) = E(K_t/N_5(t_0) = 0)P(N_5(t_0) = 0/N_5(t_0) < 2) + E(K_t/N_5(t_0) = 1)P(N_5(t_0) = 1/N_5(t_0) < 2)$$

Notar que  $N_5(t)$  es un proceso de Poisson de tasa  $\beta q_5$ . Luego:

$$P(N_5(t_0) = 0/N_5(t_0) < 2) = \frac{P(N_5(t_0) = 0 \cap N_5(t_0) < 2)}{P(N_5(t_0) < 2)} = \frac{P(N_5(t_0) = 0)}{P(N_5(t_0) < 2)} = \frac{e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}$$

Análogamente,

$$P(N_5(t_0) = 1/N_5(t_0) < 2) = \frac{\beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}$$

Para calcular los términos que faltan, notar que por la propiedad de incrementos estacionarios, se cumple que  $P(N_5(t) - N_5(t_0) = n) = P(N_5(t - t_0) = n) = \frac{(\beta q_5 (t - t_0))^n e^{-\beta q_5 (t - t_0)}}{n!}$ . Luego:

$$E(K_t/N_5(t_0) = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k}^{2k+1} \frac{(\beta q_5 (t - t_0))^n e^{-\beta q_5 (t - t_0)}}{n!}$$

$$E(K_t/N_5(t_0) = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k-1}^{2k} \frac{(\beta q_5 (t - t_0))^n e^{-\beta q_5 (t - t_0)}}{n!}$$

La respuesta final es entonces:

$$E(K_t/N_5(t_0) < 2) = \frac{e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k}^{2k+1} \frac{(\beta q_5 (t - t_0))^n e^{-\beta q_5 (t - t_0)}}{n!} + \frac{\beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}}{e^{-\beta q_5 t_0} + \beta q_5 t_0 e^{-\beta q_5 t_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2k-1}^{2k} \frac{(\beta q_5 (t - t_0))^n e^{-\beta q_5 (t - t_0)}}{n!}$$

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo  
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung  
dyung@ing.uchile.cl