



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Felipe Castro, Francisco Uribe

SOLUCIÓN CLASE AUXILIAR 2

Procesos de Poisson y Teoría de Renovación

8 de Agosto de 2007

Problema 1

1. El proceso combinado $\{N_1(t) + N_2(t); t \geq 0\}$ es un proceso de poisson de tasa $\lambda_1 + \lambda_2$ y cada llegada pertenece a $N_1(t)$ indep. con probabilidad $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Entonces para que el número de llegadas del proceso $N_1(t)$ sean n tiene que darse que la llegada del primer proceso le "gane" a la del segundo exactamente n veces y que luego "pierda". Esto es:

$$P[N = n] = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

2. Simplemente busquemos la distribución del número de llegadas de $N_1(t)$ en $[0, \tau]$:

$$P[N_1(t) = n] = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}$$

3. Sea $R = n$ llegadas en primer periodo ON, y $\tau =$ tiempo de término del primer periodo ON. Entonces busquemos:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= P[t \leq \tau \leq t + dt | R] \\ &= \frac{P[R|t \leq \tau \leq t + dt] \cdot P[t \leq \tau \leq t + dt]}{P[R]} \end{aligned}$$

Pero de las partes anteriores y de la distribución exponencial del tiempo entre arribos del segundo proceso se tendra que:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= \frac{\frac{(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t}}{n!} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} dt \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^{n+1} t^n}{n!} \end{aligned}$$

Es decir se distribuye de acuerdo a una $gamma(n + 1, \lambda_1 + \lambda_2)$

4. Condicionaremos sobre la primera llegada del proceso combinado $N_1(t) + N_2(t)$.

$$\begin{aligned} E[X_a] &= E[X_a | N_1(t) \text{ primero}] \cdot P[N_1(t) \text{ primero}] + E[X_a | N_2(t) \text{ primero}] \cdot P[N_2(t) \text{ primero}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \left[\frac{2}{\lambda_2} + E[X_a]\right] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \Rightarrow E[X_a] &= \frac{3}{\lambda_1} \end{aligned}$$

Problema 2, Control 1 Primavera 2001

1. Nos limitaremos a calcular $q(t)$, la probabilidad que un auto cualquiera haya tenido que esperar. Para esto vemos que esta misma probabilidad condicionada en el instante de llegada toma la siguiente forma (se supone que el semáforo parte en verde):

$$P(s) = \begin{cases} 1 & t \in [(2n-1) \cdot A, 2n \cdot A] \text{ para algun } n \in \{1, \dots\} \\ 0 & t \in [2n \cdot A, (2n+1) \cdot A] \text{ para algun } n \in \{0, 1, \dots\} \end{cases}$$

De esta forma es directo ver que:

$$q(t) = \left\lfloor \frac{t}{A} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{t}{A} \rfloor}{2} \right\rfloor$$

Entonces podemos afirmar que $X(t)$ sigue un proceso de poisson NO homogéneo de tasa $(\lambda \cdot q(t))$.

2. Mediante la misma lógica anterior tendremos que la distribución pedida es:

$$P[N_e(t) = n] = \frac{e^{-\lambda q(t)\tau(t)} \cdot (\lambda q(t)\tau(t))^n}{n!}$$

Donde:

$$\tau(t) = t - A \left\lfloor \frac{t}{A} \right\rfloor$$

3. Claramente el costo del ciclo será el costo del semáforo rojo para los de la calle x más el costo del semáforo rojo para los de la calle y. Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo calle x}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Costo calle x} | N_x(A) = n] \cdot P[N_x(A) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{A \cdot M}{2} \cdot P[N_x(A) = n] \\ &= \lambda_x A \frac{A \cdot M}{2} \end{aligned}$$

Donde el termino para $E[\text{Costo calle x} | N_x(A) = n]$ viene del hecho que las llegadas condicionales de poisson se distribuyen (idénticas) uniformes en el intervalo que condiciona y que sí un automóvil llega en el instante s , se incurrirá en un costo de $M \cdot (A - s)$.

De la misma forma:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo calle y}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Costo calle y} | N_y(B) = n] \cdot P[N_y(B) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{B^2 \cdot M}{3} \cdot P[N_y(B) = n] \\ &= \lambda_y B \frac{B^2 \cdot M}{3} \end{aligned}$$

Donde el termino para $E[\text{Costo calle x} | N_y(B) = n]$ viene del hecho que las llegadas condicionales de poisson se distribuyen (idénticas) uniformes en el intervalo que condiciona y que sí un automóvil llega en el instante

s, se incurrirá en un costo de $M \cdot (B - s)^2$.

Entonces:

$$E[\text{Costos}] = \lambda_x \frac{A^2 \cdot M}{2} + \lambda_y \frac{(C - A)^3 \cdot M}{3}$$

4. La idea es derivar e igualar a 0, siempre y cuando el resultado sea coherente (A este entre 0 y C).

$$\frac{dE[\text{Costos}]}{dA} = \lambda_x A \cdot M - \lambda_y (C - A)^2 \cdot M = 0 \Rightarrow A^*$$

Problema 3

Sea v la velocidad del auto entrando en el tiempo t , por lo que se tiene que el tiempo de viaje a velocidad v será $t_v = \frac{L}{v}$ donde L es el largo de la carretera.

Si definimos G como la distribución del tiempo de viaje, y dado que $T \equiv \frac{L}{X}$ es el tiempo de viaje cuando la velocidad es X , se tendrá que $G(x) = 1 - F(\frac{L}{x})$, con F la distribución de la velocidad.

Consideremos un evento a un auto que entra a la carretera, el que contaremos si se encuentra con el auto entrando en t . Independiente de los demás, un evento ocurriendo en un instante s con $s < t$ (auto entrando a la carretera en s) será contado con probabilidad $P[s + T > t + t_v]$. De la misma manera, un evento ocurriendo en un instante s con $s > t$ será contado con probabilidad $P[s + T < t + t_v]$.

Así, se puede escribir la probabilidad que un evento que ocurre en un instante s sea contado como:

$$p(s) = \begin{cases} 1 - G(t + t_v - s) & \text{si } s < t, \\ G(t + t_v - s) & \text{si } s > t, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

De esta manera el número de encuentros de un auto ingresando en t será un proceso de Poisson filtrado tal que:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty p(s) ds &= \lambda \int_0^t [1 - G(t + t_v - s)] ds + \int_t^{t+t_v} G(t + t_v - s) ds \\ &= \lambda \int_{t_v}^{t+t_v} [1 - G(y)] dy + \int_0^{t_v} G(y) dy \end{aligned}$$

Ahora sólo basta con minimizar esta expresión derivando e igualando a 0.

$$\frac{d}{dt_v} \left\{ \lambda \int_0^\infty p(s) ds \right\} = \lambda \left[[1 - G(t + t_v)] - [1 - G(t_v)] + G(t_v) \right]$$

Donde se tiene que $G(t_v) = \frac{1}{2}$ dado que cuando t tiende a infinito $G(t + t_v) \approx 1$. De esta manera, el óptimo tiempo de viaje es el tiempo medio, y por lo tanto la velocidad que minimiza los encuentros es la mediana de la distribución de velocidades.

Problema 4

1. Para esto desarrollaremos el lado derecho de la expresión:

$$\begin{aligned} E[N(t) / X_1 = x] &= E[N(t) - N(x) + N(x) / X_1 = x] \\ &= E[N(t) - N(x) / X_1 = x] + E[N(x) / X_1 = x] \end{aligned}$$

$$\text{Por ser } x \text{ un punto de regeneración} = E[N(t - x)] + 1$$

2. Sabemos que $m(t) = E[N(t)]$, y que podemos escribir esta esperanza como:

$$\begin{aligned}
 m(t) &= E[N(t)] \\
 &= \int_0^t E[N(t) / X_1 = x] dF(x) \\
 &= \int_0^t (1 + E[N(t-x)]) dF(x) \\
 &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x)
 \end{aligned}$$

3. Para demostrar lo primero basta notar que si F se distribuye $U[0, 1]$ se tendra:

- $F(t) = t$
- $dF(x) = dx$

Reemplazando estos valores en la ecuación fundamental de renovación

$$\begin{aligned}
 m(t) &= t + \int_0^t m(t-x) dx \\
 \text{Haciendo CV } y = t-x &= t + \int_0^t m(y) dy \\
 \text{Derivando a ambos lados} \\
 m'(t) &= 1 + m(t) \\
 \text{Ocupando CB } m(0) &= 0 \\
 m(t) &= e^t - 1
 \end{aligned}$$

La segunda parte requiere entender cuál es el valor del que debemos encontrar su valor esperado. Dado el número de eventos necesarios para que los tiempos entre eventos sumen más de uno es $N(1) + 1$, se tiene que $E[N(1) + 1] = e^1 - 1 + 1 = e$.

Problema 5

1. En este caso el ciclo quedará definido como el tiempo entre dos partidas consecutivas de trenes. El tiempo esperado del ciclo es el tiempo en que esperamos lleguen N personas, por lo que $E[\text{Largo de un ciclo}] = N \cdot \mu$. Si llamamos X_n al tiempo entre el n y el $(n+1)$ -ésimo pasajero llegando a la estación se tendrá que la esperanza del costo de un ciclo puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 E[\text{Costo de un ciclo}] &= E\left[\sum_{i=1}^{N-1} c \cdot i \cdot X_i\right] + K \\
 &= \frac{c \cdot \mu \cdot N(N-1)}{2} + K
 \end{aligned}$$

De esta manera el costo esperado por unidad de tiempo será $\frac{c \cdot (N-1)}{2} + \frac{K}{N \cdot \mu}$.

2. En este caso el largo del ciclo está predeterminado y será igual a T . Para calcular el costo del ciclo hay que utilizar esperanzas condicionales de manera que si llamamos X_n al tiempo entre el n y el $(n+1)$ -ésimo

pasajero llegando a la estación se tendrá que la esperanza del costo de un ciclo puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 E[\text{Costo de un ciclo}] &= \sum_{j=0}^{\infty} E[\text{costo de un ciclo} / N(T) = j] \cdot P[N(T) = j] + K \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \frac{T \cdot c}{2} \cdot P[N(T) = j] + K \\
 &= \frac{T^2 \cdot c}{2 \cdot \mu} + K
 \end{aligned}$$

Así, el costo por unidad de tiempo será $\frac{c \cdot T}{2 \cdot \mu} + \frac{K}{T}$

3. De la parte (a) podemos encontrar el número de pasajeros que minimiza el costo esperado por unidad de tiempo, el que resulta $N^* = \sqrt{\frac{2K}{\mu \cdot c}}$. Así, el costo promedio por unidad de tiempo óptimo será:

$$\frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{2K}{\mu \cdot c}} - \frac{c}{2} + \frac{K}{u \cdot \sqrt{\frac{cK}{\mu \cdot c}}} = \sqrt{\frac{c \cdot K}{\mu}} - \frac{c}{2}$$

De la parte (b) se tiene que el tiempo óptimo de ciclo será $T^* = \sqrt{\frac{2\mu \cdot K}{c}}$. Así, el costo promedio por unidad de ciclo será:

$$\sqrt{\frac{c \cdot K}{\mu}}$$

Felipe Castro
fecastro@ing.uchile.cl

Francisco Uribe
fruribe@dcc.uchile.cl