



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 3

Teoría de Renovación

15 de Agosto de 2007

Problema 1

Suponga que un proceso puede encontrarse en cualquiera de n posibles estados, los que recorre de manera secuencial. El tiempo que permanece en el estado i -ésimo antes de pasar al siguiente es una variable aleatoria de distribución F_i , independiente de las demás. El proceso comienza en el estado 1, pasa al 2 y cuando llega al estado n vuelve al estado 1 y comienza todo de nuevo. Definiendo un proceso de renovación alternante encuentre:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[\text{Proceso esté en el estado } i \text{ en el instante } t]$$

Problema 2

1. Considere un proceso de renovación $\{N(t), t \geq 0\}$ con tiempos entre arribos $X_n, n \geq 1$ con distribución común F , y suponga que cada tiempo en que una renovación ocurre recibimos una recompensa. Sea R_n la recompensa recibida el instante de la n -ésima renovación. Supondremos que las variables R_n son i.i.d. (posiblemente correlacionadas con el largo del intervalo de renovación). Sea

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_n$$

Demuestre que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R]}{E[X]}$$

Para esto defina un tiempo de parada, utilice la ecuación de Wald y el teorema elemental de renovación.

2. Tras la polémica causada por sus peculiares iniciativas, el alcalde de Santiago se dispone a sorprendernos con una nueva y genial idea: Paseos en barco por Río Mapocho, los denominados “KK-Tours”. Estos tours partirán de “Puerto Mapocho” exactamente cada T unidades de tiempo. El alcalde estima que la llegada de pasajeros a los barcos se producirá de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Un pasajero que llega al puerto esperará la partida del próximo barco con probabilidad $e^{-\mu t}$ si el tiempo hasta esta partida es t . Un costo fijo K es incurrido cada vez que un bote sale de puerto y el precio de un boleto para el tour es r . Muestre que el valor de T que maximiza la utilidad esperada en el largo plazo es la única solución a la siguiente ecuación:

$$e^{-\mu T} \left(r\lambda T + \frac{r\lambda}{\mu} \right) = \frac{r\lambda}{\mu} - K$$

sujeto a que $\frac{r\lambda}{\mu} > K$.

Problema 3

Clientes llegan a un restaurante Japonés de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. El sistema de atención es tal que, cada vez que se juntan C clientes en la recepción, estos son derivados a una mesa del restaurante. Suponga que el restaurante cuenta con una cantidad ilimitada de mesas. Además considere que el restaurante opera las 24 horas del día durante 7 días a la semana.

1. ¿Cuál es la probabilidad que un cliente arbitrario encuentre j clientes esperando una mesa al instante de su llegada?
2. Calcule la distribución de probabilidad del tiempo que un cliente debe esperar en la recepción hasta conseguir una mesa.

El tiempo que demora un cliente en comer es una variable aleatoria independiente del proceso de llegada, con distribución $G(x)$. Cuando un cliente termina su cena abandona inmediatamente el restaurante, donde es capaz de observar a las personas que esperan en la recepción.

3. Cual es la distribución de probabilidad del número de personas esperando una mesa en la recepción al momento que un cliente se retira?.

Supongamos ahora que los clientes, al momento de llegar al restaurante, estiman el tiempo que deberán esperar hasta conseguir una mesa, y si ese tiempo es mayor a su disposición a esperar, entonces se retiraran de inmediato. En este sentido los clientes son homogéneos y la distribución de su disponibilidad a esperar es $F(x)$. Además los clientes al momento de estimar su tiempo de espera consideran la actitud racional de los clientes que llegarán después de él. Esto es al momento de estimar su tiempo de espera, lo hace sabiendo que los clientes que lleguen después lo harán de la misma manera y tomarán su decisión utilizando el mismo criterio.

Por otro lado una vez que deciden quedarse y esperar, lo hacen hasta conseguir una mesa.

4. ¿Cuál es la probabilidad que un cliente arbitrario encuentre j clientes esperando una mesa al instante de su llegada?
5. Calcule la esperanza del tiempo que un cliente debe esperar en la recepción hasta conseguir una mesa.

Problema 4

En $t=0$ un ratón es abandonado en el centro de un laberinto, lugar en el cual debe elegir entre tres posibles rutas a seguir. La ruta 1 lo lleva por un camino que tras dos minutos de viaje lo regresa al centro del laberinto, no sin antes encontrar un gran trozo de queso. La ruta 2 lo lleva por un camino que lo regresa al centro del laberinto tras 4 minutos de viaje, pero que no contiene queso alguno. Finalmente la ruta 3 lo lleva por un camino donde el ratón nuevamente no encuentra queso y lo regresa al centro del laberinto tras 8 minutos de viaje. Suponga que cada vez que el ratón llega al centro del laberinto elige aleatoriamente la ruta que seguirá, sin recordar elecciones pasadas. Sea T el tiempo que demora al ratón encontrar el pedazo de queso (suponga que este esta al final de la ruta 1).

1. Defina una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $X_1; X_2; \dots$ y un tiempo de parada N tal que:

$$T = \sum_{i=1}^N X_i$$

2. Use la ecuación de Wald para encontrar $E[T]$
3. Calcule $E[\sum_{i=1}^n X_i | N = n]$ y note que no es igual a $E[\sum_{i=1}^n X_i]$.
4. Use el resultado anterior para recalcular $E[T]$.