Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 2
Procesos de Poisson y Teoría de Renovación
8 de Agosto de 2007

Problema 1

Sea $[N_1(t), t > 0]$ un proceso de Poisson de tasa λ_1 . Las llegadas de este proceso se colocan en ON o en OFF debido a un switch activado y desactivado por las llegadas de un segundo proceso de Poisson independiente de tasa λ_2 $[N_2(t), t > 0]$. Sea $[N_a(t), t > 0]$ el proceso resultante, i.e., $Na_(t)$ incluye las llegadas de $N_1(t)$ cuando $N_2(t)$ es par.

1. Encuentre la distribución del número de eventos de $N_1(t)$ registrados durante el N-ésimo período en que el switch esta en ON.
2. Dado que la primera llegada del segundo proceso ocurrió en τ, encuentre la distribución condicional del número de llegadas de $N_1(t)$ hasta τ .
3. Dado que el número de llegadas de $N_1(t)$ hasta la primera llegada de $N_2(t)$ es n, encuentre la densidad de la primera llegada de $N_2(t)$.
4. Sea X_a el tiempo entre arribos del proceso $N_a(t)$, calcule $E(X_a)$.

Problema 2, Control 1 Primavera 2001

Autos llegan a un semáforo de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Este semáforo cambia de color cada A unidades de tiempo. Si un auto llega al cruce y encuentra el semáforo en verde pasará inmediatamente. Si lo encuentra en rojo deberá esperar hasta el próximo cambio de luz. Suponiendo que la calle es lo suficientemente ancha como para que no se formen colas, y que el tiempo que demora un auto en atravesar el cruce es despreciable, calcule:

1. La distribución de probabilidades de X(t), la cantidad de autos que han tenido que esperar para cruzar en algún instante, en t.
2. La distribución de probabilidades del número de autos que están esperando para cruzar en el instante t.

Suponga que en realidad este semáforo esta instalado en el cruce entre dos calles. Por una de las calles (calle x) llegan autos según un proceso de Poisson de tasa λ_x. Cada unidad de tiempo que un auto espera en esta calle significa un costo de M [$]. Por otro lado, los autos que vienen por la otra calle (calle y) llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_y. Si un auto que viene por esta última vía espera t unidades de tiempo en el semáforo, se incurre en un costo t^2M [$]. Si llamamos A al lapso de tiempo durante el cual el semáforo esta en rojo para la calle x y B al tiempo durante el cual el semáforo esta en rojo para la calle y ($A + B = C$, con C constante);

3. Calcule la esperanza del costo incurrido desde que el semáforo de luz roja, cambia a verde y vuelve a ser roja.
4. Calcule los tiempos A^* y B^* que minimizan el costo incurrido por el sistema durante el ciclo (C).

Problema 3

Suponga que autos entran en una carretera de un solo sentido y de un largo L, de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Cada auto viaja a velocidad constante determinada aleatoriamente, independientemente de los otros autos, mediante una distribución F. Cuando un auto se encuentra con un auto más lento, lo sobrepasa sin perdida de tiempo. Suponga que un auto entra a la carretera en el instante t. Sea t_v el tiempo que demora este vehículo en recorrer la carretera y sea G la distribución del tiempo que demora un vehículo cualquiera en recorrer la carretera. Muestre que cuando t$\rightarrow \infty$ la velocidad del auto que minimiza el número de encuentros con otros autos, donde un encuentro con un auto se produce cuando el auto es sobre pasado o sobrepasa a otro, es tal que $G(t_v) = 1/2$.

Problema 4

Sea $N(t)$ un proceso de renovación.

1. Muestre que:
$$E\Big[N(t) \;/\; X_1 = x\Big] = E\Big[N(t-x)\Big] + 1$$

2. Ocupando lo anterior muestre que:
$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x) \quad t > 0$$

3. Si $F \rightsquigarrow U[0,\, 1]$ muestre que:
$$m(t) = E\Big[N(t)\Big] = e^t - 1 \quad 0 < t < 1$$

   Argumente que el número esperado de variables aleatorias iid $U[0,\, 1]$ necesarias para que su suma exceda 1 es igual a e.

Problema 5

Pasajeros llegan a una estación de trenes de acuerdo a un procesos de renovación con tiempo entre llegadas medio igual a μ. Cuando se juntan N pasajeros en la estación, parte un tren. Si hay n pasajeros esperando, la estación percibe un costo a una tasa de $\$n \cdot c$ por unidad de tiempo. Además cada vez que un tren es despachado incurre en un costo de $\$K$.

1. Calcule el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación en el largo plazo.

En lo que sigue considere que el proceso de renovación de llegada de pasajeros es un proceso de Poisson de media μ.

2. Suponga otro tipo de política en que el tren parte cada T unidades de tiempo. Calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo con esta nueva política y encuentre el T^*, el valor de T que lo minimiza.

3. Sea N^* el valor de N que minimiza el costo promedio por unidad de tiempo incurrido por la estación, si un tren parte cuando se juntan N personas esperando (parte(a)). Muestre que la política en la que el tren parte cuando se juntan N^* pasajeros entrega un costo promedio por unidad de tiempo menor que la política en la que el tren parte cada T^* unidades de tiempo (parte(b)). Entregue alguna intuición del resultado.