Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Mario Guajardo, Daniel Yung

Solución Clase Auxiliar 1
2 de Agosto de 2006

Problema 1

1. Hay que demostrar que:
$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

   Entonces:
$$\begin{aligned} P[x > s+t|x > s] &= \tfrac{P[x>s+t \wedge x>s]}{P[x>s]} \\ &= \tfrac{P[x>s+t]}{P[x>s]} \\ &= \tfrac{1-P[x\leq s+t]}{1-P[x\leq s]} \\ &= \tfrac{1-[1-e^{-\lambda(s+t)}]}{1-[1-e^{-\lambda(s)}]} \\ &= \tfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P[x \geq t] \end{aligned}$$

2. Tenemos que:
$$\begin{aligned} P[T_1 < T_2] &= \int_0^\infty P[T_1 < T_2 | T_2 = t] \cdot f_{T_2}(t)dt \\ &= \int_0^\infty P[T_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \tfrac{\mu}{\mu+\lambda} \cdot \int_0^\infty (\mu+\lambda) e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \tfrac{\mu}{\mu+\lambda} \\ &= \tfrac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{aligned}$$

3. Debemos encontrar una expresión para
$$P[X = \text{mín}\{X_1, X_2, ..., X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\ &= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] ... \cdot P[X_n > t]) \\ &= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i(t)}) \end{aligned}$$

   Para el caso exponencial tenemos que:
$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i(t)}) \\ &= 1 - \textstyle\prod_{i=1}^n 1 - 1 + e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda t)} \\ &= 1 - e^{-n\lambda t} \end{aligned}$$

   $\Rightarrow X \rightsquigarrow exp(n\lambda)$

4. Llamamos λ_1 y λ_2 a los parmetros de las v.a. Poisson:

$$\begin{aligned}
P[X_1+X_2=N] &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} P[X_1+X_2=N|X_2=i]\cdot P[X_2=i] \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N} P[X_1=N-i]\cdot P[X_2=i] \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{N} \frac{\lambda_1^{N-i}e^{-\lambda_1}}{(N-i)!}\cdot\frac{\lambda_2^{i}e^{-\lambda_2}}{i!} \\
&= \tfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{N!}\cdot\textstyle\sum_{i=0}^{N}\frac{N!}{(N-i)!i!}\lambda_1^{N-i}\lambda_2 i \\
&= \tfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^N}{N!}
\end{aligned}$$

Problema 2

Sean las variables:

$$\begin{aligned}
R &= \text{Respuesta correcta a la pregunta.} \\
A_1 &= \text{Respuesta dada por el ayudante 1 a la pregunta.} \\
A_2 &= \text{Respuesta dada por el ayudante 2 a la pregunta.}
\end{aligned}$$

Tenemos que calcular:

$$P(R=d|A_1=d\wedge A_2=d) = \frac{P(A_1=d\wedge A_2=d|R=d)\cdot P(R=d)}{P(A_1=d\wedge A_2=d)}$$

Pero

$$\begin{aligned}
P(A_1=d\wedge A_2=d|R=d) &= P(A_1\text{diga la verdad})\cdot P(A_2\text{diga la verdad}) \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} \\
P(R=d) &= \frac{1}{9} \\
P(A_1=d\wedge A_2=d) &= \sum_{r=a}^{i} P(A_1=d\wedge A_2=d|R=r)\cdot P(R=r) \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{9}+\sum_{\substack{r=a\\ i\neq d}}^{r}\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
P(R=d|A_1=d\wedge A_2=d) &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{1440}+\frac{1}{15}} \\
&= \frac{96}{97}
\end{aligned}$$

Problema 3

Para determinar x^*, el momento óptimo para citar al segundo paciente, seguiremos los pasos dados enumerados en el enunciado del problema.

1. Primero debemos calcular la probabilidad que, dado un x, el segundo paciente encuentre al dentista ocupado. Esto es equivalente a la probabilidad que la atención del paciente se demore más de x (x$\geq$ 0) unidades de tiempo. Es decir:

$$P_x[\text{Encontrar al dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{\partial t}{(b-a)} = \frac{b-x}{(b-a)}$$

   Vemos que no tiene sentido que $x > b$ dado que implica que con certeza el dentista estará libre. Tampoco tiene sentido un $x < a$ dado que con certeza el dentista estará ocupado.

2. Primero separemos los casos:

   - Si encuentra al dentista ocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{(t-x)\partial t}{(b-x)} = \frac{b-x}{2}$$

   - Si encuentra al dentista desocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] = 0$$

   Entonces, combinando los dos resultados anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} E_x[\text{tiempo de espera}] &= E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] \cdot P_x[\text{dentista desocupado}] \\ &\quad + E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] \cdot P_x[\text{dentista ocupado}] \\ E_x[\text{tiempo de espera}] &= \frac{b-x}{b-a} \cdot \frac{b-x}{2} = \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} \end{aligned}$$

3. Claramente el dentista estará en el consultorio hasta que termine la atención del segundo paciente:

$$\begin{aligned} E_x[\text{Tiempo del dentista en consulta}] &= x + E_x[\text{tiempo de espera}] + E_[\text{tiempo de atención}] \\ &= x + \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

4. Entonces el problema de minimización a enfrentar será el siguiente:

$$\min_{0 \leq x \leq b} M \cdot [x + \frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)} + \frac{a+b}{2}] + P \cdot [\frac{(b-x)^2}{2 \cdot (b-a)}]$$

   Si derivamos e igualamos a 0 tenemos que:

$$x^* = b - \frac{M \cdot (b-a)}{M+P}$$

Problema 4

1. Para que $X_{(i)}$ sea igual a x obligatoriamente $i-1$ de las variables X_i tienen que ser menores a x y $n-i$ mayores a x. Como existen $\binom{n}{i-1}$ formas de escoger que variables X_i serán menores que x y de las $(n-(i-1))$ restantes existen $\binom{n-(i-1)}{1}$ formas de escoger cuál será la i-ésima, tenemos que:

$$f_{X_{(i)}}(x) = \binom{n}{i-1}\binom{n-(i-1)}{1}F(x)^{i-1}\overline{F}(x)^{n-i}f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F(x)^{i-1}\overline{F}(x)^{n-i}f(x)$$

2. Esto ocurrirá si i o más variables X_i son menores que x.

3. Claramente:

$$P[X_{(i)} \leq x] = \sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}F(x)^j\overline{F}(x)^{n-j}$$

4. Utilice (1) y (3) para establecer la siguiente identidad:

   Integramos la expresión encontrada en (1) hasta x y encontramos la identidad:

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}F(x)^j\overline{F}(x)^{n-j} = \int_0^x \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F(x)^{i-1}\overline{F}(x)^{n-i}f(x)dx$$

   Realizando el cambio de variable $z = F(x)$ tendremos que:

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}y^j(1-y)^{(n-j)} = \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}z^{i-1}(1-z)^{n-i}dz$$

Problema 5

1. *a)* Sea t_i el instante de la llegada del i-ésimo pasajero antes de la llegada del siguiente tren. Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)]$

   Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t, se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] &= \sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-t_i)/N(t)=n]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)}t/N(t)=n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)}t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}E[t/N(t)=n] - \sum_{i=1}^{N(t)}E[t_i/N(t)=n]\right]\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}$$

   En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t] = t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0,t]$ cuya esperanza es $E[t_i] = \frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t) = n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E[\sum_{i}^{N(t)}(t-t_i)] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[nt - \frac{nt}{2}\right]\cdot\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

b) En la parte 1 se calculó la esperanza pedida dado un tiempo entre trenes conocido igual a t. Dado que los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora], el tiempo entre llegadas sigue una distribución exponencial de parámetro μ. Luego descondicionando el resultados de la parte anterior, se tiene que la esperanza pedida es:

$$\int_0^\infty \frac{\lambda t^2}{2}\mu e^{-\mu t}dt$$

2. Sea $N(t)$ la cantidad de clientes que han llegado al banco hasta el instante t. Dado que se registraron 2 llegadas en un hora de operación, el instante de cada una de esas llegadas se distribuye Uniforme en el intervalo de una hora. Luego:

   a) $P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

   b) $2 \cdot P[N(\frac{1}{3}) = 1/N(1) = 2] + P[N(\frac{1}{3}) = 2/N(1) = 2] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Problema 6

1. Sea N_m= Número de personas que se suben al m-esimo bus. Sea x_m= tiempo entre llagada del bus m-1 y el m-esimo.

$$P(N_m = j|x_m = t) = \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!}$$

2. Tenemos que descondicionar el resultado de la parte anterior:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty P(N_m = j|x_m = t) \cdot f_{x_m}(t)\partial t$$

donde $f_{x_m}(t)$ es la densidad del tiempo entre el bus m-1 y el m-esimo. Sin embargo sabemos que $f_{x_m}(t) \rightarrow exp(\lambda)$. Entonces:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!} \cdot \lambda e^{-\lambda t}\partial t$$

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{j+1}t^j e^{-(\lambda+\mu)t}\partial t}{j!}$$

Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una $Gamma(j+1, \lambda+\mu)$ se tiene que:

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

3. Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00 el número de pasajeros que se subira al proximo bus será $N_1 + N_2$ donde:

   - N_1= Número de personas que se sube entre 10:00 y 11:00.
   - N_2= Número de personas que se sube a partir de las 11:00.

Entonces:

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j \wedge N_2 = n-j)$$

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j) \cdot P(N_2 = n-j)$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{\mu^j}{2}}{j!} (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-j}$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda \mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} [\frac{\lambda+\mu}{2}]^j \cdot \frac{1}{j!}$$

4. El número de pasajeros esperando en cualquier instante se el proceso comenzo hace "mucho tiempo" $\Rightarrow$ independiente del instante, la distribución de prob. de la gente esperando sigue la misma dsitr. de probabilidad de la parte 2. Sean:

   - N_1= Número de personas que esta esperando
   - N_2= Número de personas que se sube a partir del instante escogido.

   Entonces:

$$P(N_1 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

$$P(N_2 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

   De esta forma se tiene que:

$$P(N_m = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda\mu^k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{\lambda\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}}$$

$$P(N_m = n) = (n+1)\frac{\lambda^2\mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+2}}$$

Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl