Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliar : Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 1
Procesos de Poisson, 1 de Agosto de 2007

Problema 1

1. Pasajeros llegan a un estación de Metro según un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. El tiempo entre los arribos de los trenes es de t [horas] y su capacidad es tal que puede llevar a todos los pasajeros esperando. Si acaba de pasar un tren y la estación está vacía:
   - *a*) Calcule la esperanza de la suma de los tiempos de espera de los pasajeros que subirán al siguiente tren.
   - *b*) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior si los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa μ[trenes/hora]?
2. Clientes llegan a un banco como un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora]. Suponga que 2 clientes llegaron durante la primera hora.
   - *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros 20 minutos?
   - *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haya llegado durante los primeros 20 minutos?

Problema 2

Los auxiliares de ramo, hinchas acérrimos de *Santiago Morning*, asisten al estadio a ver al equipo de sus amores. Durante un partido los jugadores hacen goles de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Los auxiliares celebran cada gol durante un tiempo B, lapso de tiempo durante el cual no son capaces de ver lo que sucede en la cancha. Si se supone que tras cada gol, el partido es reiniciado instantáneamente conteste:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que los auxiliares vean los 7 primeros goles?
2. Para $t \geq (n-1)B$, encuentre $P[R(t) \geq n]$, donde R(t) es el número de goles vistos por los auxiliares hasta el instante t.

Problema 3, Ross 2.4

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de tasa λ. Calcular $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

Problema 4, Ross 2.9

Suponga que eventos ocurren según un proceso de Poisson de tasa λ. Cada vez que un evento ocurre, debemos decidir si parar o no, siendo el objetivo parar cuando ocurre el último evento antes de cierto tiempo T. Esto es, si un evento ocurre al instante t, $0 \leq t \leq T$ y decidimos parar, perdemos si ocurre al menos un evento en el intervalo $(t, T]$ y ganamos en caso contrario. Si no paramos cuando un evento ocurre y no hay eventos adcionales hasta T, también perdemos. Considere la estrategia de parar al primer evento que ocurre después de un tiempo s, $0 \leq s \leq T$.

1. Si se usa dicha estrategia, ¿Cuál es la probabilidad de ganar?
2. ¿Qué valor de s maximiza la probabilidad de ganar?
3. Muestre que la probabilidad de ganar bajo la estrategia óptima es $1/e$.

Problema 5, Ross 2.11

Autos pasan por una calle de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[auto/min]$. Una persona que quiere cruzar dicha calle espera hasta que ve que ningún vehículo pasará en los próximos $T[min]$. Encuentre el tiempo esperado que la persona espera antes de cruzar la calle. (Note por ejemplo que si ningún auto pasará en los primeros T minutos el tiempo de espera es 0).

Problema 6

Considere un puerto al que llegan barcos de M países diferentes. La llegada de barcos provenientes del país i sigue un Proceso de Poisson de tasa λ_i. Después de descargar en el puerto, cada barco que viene del país i, independiente de todo el resto, seguirá viaje al país j con una probabilidad P_{ij}. Sea $N_j(t)$ el número de barcos que han zarpado desde el puerto rumbo al país j hasta el instante t. Suponiendo que el tiempo que tardan los barcos en descargar una vez que llegan al puerto es despreciable, entregue expresiones para $P[N_j(t) = k]$ y la esperanza de $N_j(t)$.

Problema 7

Suponga que autos entran en el kilómetro 0 a una carretera de una dirección en infinita según un proceso de Poisson de tasa λ. El auto i que entra escoge una velocidad constante V_i (kms/hrs) a la cual viajar. Suponga que las velocidades V_i son variables aleatorias, independientes, positivas y de distribución común F. Encuentre el número esperado de autos que se encuentran entre los kilómetros a y b ($a < b$) de la carretera en el instante t (medido en horas). Suponga que los autos se adelantan unos a los otros sin pérdida de tiempo.