IN780
Segundo Semestre, 2007

Guía de Problemas

Problema 1 Un individuo, que posee un nivel de riqueza w, puede invertir en dos instrumentos. El primero entrega 1 peso por cada peso invertido. El segundo entrega z, que es una variable aleatoria con distribución $F(z)$. Se tiene que $\int zdF(z) > 1$. La funcion de utilidad de Bernoulli del agente, que es averso al riesgo, es u.

a) Explique que significa $\int zdF(z) > 1$ y que restricciones sobre u implica el hecho que el agente sea averso al riesgo.

b) Llamamos β a la cantidad invertida en el instrumento "seguro" y α la cantidad invertida en el instrumento "aleatorio". Demuestre que si el agente maximiza sobre las cantidades a ahorrar en cada instrumento, se tiene que $\alpha^* > 0$.

Definimos $r_R(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$.

c) Demuestre que si r_R es creciente, entonces la proporción del ingreso que se invierte en el instrumento "aleatorio" decrece con w.

Problema 2 Recuerde que la función $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ es indicadora de cuan averso al riesgo es un agente (ver teorema de Arrow-Pratt).

(i) Demuestre que un agente económico que exhibe aversión al riesgo constante e igual a μ debe tener una función de Bernoulli de la forma $u(x) = Ae^{-\nu x}$, con $A < 0$. A partir de ahora asuma $A = -\frac{1}{\mu}$.

(ii) Considere un agente con función de utilidad $u(x) = \frac{1}{\gamma-1}(\alpha+\gamma x)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ definida para $x > -\frac{\alpha}{\gamma}$ y $\gamma \notin 0, 1$ tiene aversión al riesgo decreciente si $\gamma > 0$ y decreciente si $\gamma < 0$.

(iii) Demuestre que las preferencias representadas por esta función de utilidad son las mismas que las representadas por $ln(x+\alpha)$ si $\gamma \longrightarrow 1$ y que $-e^{-\frac{x}{\alpha}}$ si $\gamma \longrightarrow 0$.

(iv) Explique intuitivamente en que casos un agente puede tener aversión al riesgo creciente o decreciente.

Problema 3 Definimos la aversión relativa al riesgo como $A_R(x) = -\frac{u''(x)x}{u'(x)}$. ¿ En qué sentido esta aversión relativa al riesgo es una elasticidad? ¿Qué forma funcional debe tener u para que el agente tenga una aversión al riesgo relativa igual a λ?

Problema 4 Considere un agente que tiene una cantidad w de dinero, y que puede invertir en 2 instrumentos: el primero paga una tasa $\bar{r}$ con seguridad, y el segundo paga una tasa r que se distribuye de acuerdo a F. En lo que sigue asumiremos que $E[r] > \bar{r}$. El agente, que tiene preferencias con representación de utilidad esperada, debe decidir que cantidad invertir en el activo riesgoso, a^*.

(i) Encuentre una expresión explícita para a^* (que depende de la distribución F), en el caso que $u(x) = -(\alpha - x)^2$. Interprete la dependencia de estos resultados en la distribución F y en w.

(ii)Demuestre que a^* es creciente en w si el agente es averso al riesgo y su aversión al riesgo es decreciente.

(iii)Demuestre que $\frac{a^*}{w}$ es creciente en w si el agente es averso al riesgo, su aversión relativa al riesgo es decreciente y $a^* > 0$.

(iv) Demuestre que a^* es estrictamente decreciente en r si el agente es averso al riesgo, su aversión al riesgo es creciente y $a^* > 0$.

(v) Demuestre que a^* es estrictamente decreciente en r si el agente es averso al riesgo y $A_R(x) \leq 1$.

Problema 5 Considere una lotería que entrega \$10 y \$20 con probabilidades $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. Considere una segunda lotería 1ue entrega \$5, \$15 y \$30 con probabilidades $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{9}$. Demuestre que si un agente es estrictamente averso al riesgo y tiene preferencias representadas for una función de utilidad esperada, entonces siempre preferirá la primera lotería.

Problema 6 Considere un mundo con incertidumbre donde existen 2 activos. El primero paga \$1 por cada. El segundo paga a con probabilidad π y b con probabilidad $1-\pi$. Ambos activos tienen precio 1, y la riqueza total del agente también es 1. Existe un agente que maximiza utilidad esperada y es averso al riesgo.

(i) Escriba el problema de maximización del agente. ¿Qué significa que este problema tenga solución interior? Asúmalo para las siguientes partes.

(ii) Suponga que $a < 1$. Demuestre que la cantidad invertida en el activo fijo disminuye con a. Justifique económicamente.

(iii) ¿Cómo varía la cantidad invertida en el activo sin riesgo con respecto a π? Justifique la intuición.

(iv) ¿Puede demostrarlo formalmente? Hágalo o encuentre un contraejemplo.

Problema 7 (Becker 1974) Suponga que un padre y su hijo juegan el siguiente juego. Primero el hijo realiza una acción A, que genera ingresos para él mismo y el padre de $I_C(A)$ e $I_P(A)$ respectivamente ($I_C(A)$ es el excedente neto para el hijo después de considerar el costo de la acción, por lo que puede ser decreciente para A grande). Después, el padre observa I_C e I_P, y elige una herencia B. La utilidad del hijo es $U(I_C+B)$ y la del padre es $V(I_P-B)+kU(I_C+B)$, con $k > 0$. Asuma que $A \geq 0$ y que las funciones I_C, I_P son estrictamente cóncavas y son maximizadas para $A_C, A_P > 0$. LA herencia B puede ser positiva o negativa. Las funciones U y V son estrictamente cóncavas. Demuestre el teorema del "hijo malcriado": en el EPS de este juego el nivel A^* escogido por el hijo es el mismo que el nivel que maximiza la utilidad social $I_C(A)+I_P(A)$, a pesar que sólo el padre es altruista.

Problema 8 (Buchanan 1975) Suponga ahora que I_C e I_P son fijos y están determinados exógenamente. El hijo primero elige un ahorro S y, después de observar esto, el padre elige una herencia B. La utilidad del hijo es la suma de la utilidad presente y futura $U_1(I_C - S) + U_2(S + B)$. la utilidad del padre es $V(I_P - B) + k[U_1(I_C - S) + U_2(S + B)]$. Asuma que las funciones U_1,U_2 y V son crecientes y estrictamente cóncavas. Demuestre que el hijo ahorra muy poco comparado a lo socialmente eficiente, esto es el ahorro S que es parte de la solución de $\max_{B,S} V(I_P - B) + U_1(I_C - S) + U_2(S + B)$.

Problema 9 Demuestre que el juego en forma normal dado por

1,-2	-2,1	0,0
-2,1	1,-2	0,0
0,0	0,0	1,1

tiene un único equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Problema 10 En un cierto país hay tres candidatos presidenciales: A, B y C. Las preferencias de los votantes permiten dividir a la población en cuatro grupos, según muestra el siguiente cuadro:

Grupo	Porcentaje	Preferencias
I	36%	$C{>}B{>>}A$
II	35%	$A{>}B{>>}C$
III	17%	$B{>}A{>>}C$
IV	12%	$B{>}C{>>}A$

Los votantes del grupo 1 no quieren por ningún motivo que A sea presidente y los votantes de los grupos 2 y 3 bajo ninguna circunstancia quieren que C sea presidente. Gana la elección el candidato que obtiene la mayoría absoluta; si nadie obtiene más del 50% de los votos en la primera vuelta, hay una segunda vuelta con los dos candidatos que obtuvieron más votos (no existen los votos blancos y nulos).

a.1) Describa el juego: jugadores, acciones y pagos o preferencias. Puede asignar pagos razonables a cada resultado, siempre y cuando reflejen las preferencias del enunciado.

a.2) Escriba una posible estrategia del grupo III, sea riguroso.

a.3) Es equilibrio que todos los electores voten por aquel candidato que más les gusta? Justifique.

Problema 11 El Sr. MacRon es el propietario del restaurante MacRon, el mejor de Santiago. Recientemente varios clientes han demandado al restaurante, debido a que sus famosas hamburguesas los han hecho enfermarse. El Sr. MacRon sabe que estas infecciones son provocadas por una bacteria, la que puede eliminarse si la hamburguesa está bien cocida. Por esta razón, piensa hacer inspecciones sorpresa a la cocina. El costo de una inspección (I) es $i = 40$, y no hay costo si no lo hace (NI). El cocinero puede elegir esforzarse (E) a un costo personal $e = 60$, o no esforzarse (NE). Si se esfuerza, se asegura que la hamburguesa queda bien cocida, pero si no se esfuerza todo cliente que coma hamburguesa enfermará y demandará al restaurante, con un costo total de $d = 200$ para el Sr. MacRon. El salario que recibe el cocinero es $w = 120$, pero si en una inspección se detecta que no está esforzándose, es despedido perdiendo su salario. Las ventas del local son $v = 200$, y el único costo es el salario del cocinero.

b.1) Escriba el juego en forma normal.

b.2) Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas de este juego y calcule la utilidad de ambos jugadores.

Problema 12 Suponga que hay dos firmas que ofrecen un trabajo, la primera con un salario w_1 y la segunda con un salario w_2.Se tiene que $\frac{w_1}{2} < w_2 < 2w_1$. Hay 2 trabajadores. Si uno de ellos es el único en postular a un trabajo, lo obtiene. Si ambos postulan al mismo trabajo, entonces cada uno obtiene el trabajo con probabilidad $\frac{1}{2}$. Escriba la forma normal de este juego y encuentre todos los equilibrios de Nash.

Problema 13 Existen n pastores en un pueblo. Cada uno decide comprar una cantidad g_i de cabras a precio unitario c. Suponga que el valor de una cabra que ha pasatdo en un terreno donde pastan G cabras es $v(G)$, con $v(\cdot)$ decreciente y cóncava. Cada pastor desea maximizar su ganancia monetaria. Escriba el juego en forma normal. Calcule el equilibrio de Nash. Compare la cantidad de cabras en equilibrio $(\sum_{i=1}^{n} g_i^*)$ con el número eficiente de cabras, es decir la solucion de $\max_G Gv(G) - cG$. Interprete el por qué de la diferencia.

Problema 14 Supongamos el siguiente modelo de elecciones. Los electores están distribuídos de forma uniforme en el intervalo $[0, 1]$. los electores siempre votan por el candidato que se ubica más cerca de ellos. Por ejemplo, si el candidato 1 se ubica en la posición 0.6 y el candidato 2 se ubica en la posición 0.8, el candidato 1 obtiene todos los votos en $[0, 0.7]$, o sea el 70%. Suponga que cada candidato maximiza el porcentaje de votos obtenidos.

a) Demuestre que existe sólo un equilibrio de Nash en estrategias puras, con ambos candidatos eligiendo $x = 0.5$.

b) Suponga ahora que, después de posicionarse los candidatos 1 y 2, un tercer candidato decide si entrar o no, y donde posicionarse (la información es perfecta). Este tercer candidato sólo entrará si puede obtener más (estrictamente) que un k% de los votos, donde $k > 25$. encuentre un equilibrio donde los candidatos 1 y 2 no eligen $x = 0.5$. Se produce o no entrada del tercer candidato en el equilibrio? (Escribir bien las estrategias!!)

Problema 15 a) Dos firmas compiten tratando de desarrollar un nuevo producto. Si una firma gasta \$ p_i^2 millones de pesos en investigación, es capaz de desarrollar el nuevo producto con probabilidad p_i. En caso que una firma sea la *única* que desarrola el producto, gana una cantidad $V > 0$. Si no, gana 0. Si ambas firmas eligen el nivel de investigación simultáneamente, y les interesa maximizar ganancias, encuentre el equilibrio de Nash en estrategias puras de este juego.

b) Ahora, la firma 1, antes de iniciar sus actividades de investigación, debe contratar un gerente. La firma tiene la posibilidad de elegir cualquier gerente de tipo $\theta \in [0, 1]$. Una vez elegido este gerente, éste competiré con la otra firma, pero en vez de maximizar ganancias, maximizará $u(\pi, p) = \theta\pi + (1-\theta)p$, donde π son las ganancias y p es la probabilidad de que la investigación sea exitosa.

(b.1) Modele esta situación como un juego dinámico con 3 jugadores.

(b.2) Encuentre un EPS de este juego. ¿Cuál es el tipo θ del gerente en equilibrio? Explique intuitivamente por qué se produce este resultado. ¿Qué tipo de gerente se elegiría si no hubiera competencia en la investigación? Explique la diferencia.

Problema 16 Dos individuos están considerando invertir en una empresa que les dará \$100 en ganancias. Cada uno escribe en un sobre cuanto demanda de estas ganancias para aceptar participar. Si las demandas suman más de \$100, entonces ambos obtienen 0. Si las demandas suman \$100 o menos, entonces cada uno obtiene lo que demandó.

a) Escriba el juego en forma normal.

b) Escriba las estrategias estrictamente dominadas de cada jugador

c) Escriba las estrategias débilmente dominadas de cada jugador

d) Encuentre los equilibrios de Nash del juego

Problema 17 Demuestre rigurosamente que un equilibrio en estrategias dominantes es un equilibrio de Nash.

Problema 18 Considere la siguiente situación: un trabajador está contratado para trabajar por un salario fijo que normalizaremos a 0. Su costo de trabajar es w, y puede trabajar (T) o flojear (F). Su jefe puede inspeccionar la obra (I) o no (NI), pero debe pagar un costo de i por esta inspección. Si el trabajador es sorprendido flojeando debe pagar una multa de f. Los pagos se pueden resumir en la siguiente tabla

	NI	I
T	$-w, g$	$-w, g-i$
F	0,0	$-f, -i$

Calcule todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras y mixtas) del juego. Calcule el pago de cada agente en cada uno. Qué sucede a las estrategias cuando f crece? Y cuándo i crece? Explique la intuición detrás de estos resultados

Problema 19 Existen 2 firmas en un mercado, donde la demanda está dada por $P = 1 - (q_1 + q_2)$. Ambas firmas pueden producir con una función de costos $C(q) = \frac{q^2}{2}$.

1) Calcule el equilibrio de Nash cuando ambas firmas eligen cantidades.

De ahora en adelante suponga que la firma 1 puede, además, vender en otro mercado una cantidad adicional x_1. Sus costos totales son entonces $C(q_1, x_1) = \frac{(q_1+x_1)^2}{2}$. La demanda en este mercado externo está dada por $P = A - x_1$.

2) Encuentre el equilibrio de Nash en este nuevo juego.

3) Muestre que para $A = \frac{1}{4}$, un pequeño incremento en A, daña a la firma 1. Explique por qué esto es paradójico a primera vista, y explique luego por qué es razonable.

Problema 20 Considere un proyecto de investigación que debe ser llevado a cabo conjuntamente por N científicos. Si denotamos por e_i el esfuerzo de cada científico i, el valor final del proyecto será $V = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{e_i}$. El costo de hacer un esfuerzo e es e.

1) Si el esfuerzo fuera observable y pudiera contratarse, determine el nivel e_i^* y el valor V^* que obtendría un planificador central.
2) Supongamos ahora que un trabajador es recompensado con una cantidad $w_i = \frac{V}{N}$. Calcule cuánto trabajará cada uno en equilibrio, e^N, y cual será el valor del proyecto V^N.
3) Demuestre que la diferencia entre V^* y V^N es creciente en N. Explique a que se debe este resultado.
4) Suponga ahora que el salario está dado por

$$w_i(e_i, e_{-i}) = \begin{cases} \frac{V^*}{N} & \text{si } \sum_{i=1}^{N} \sqrt{e_i} = V^* \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Encuentre el nivel de esfuerzo y el valor del proyecto en el equilibrio de este juego. Interprete el resultado. Qué significa que $\sum_{i=1}^{N} w_i < \sum_{i=1}^{N} e_i$ en algunos casos?