

Clase Auxiliar: Política Monetaria

Profesor: José De Gregorio

Auxiliar: Sofia Moroni

1. Considere la siguiente demanda por dinero

$$\frac{M_t}{P_t} = m_t = y_t e^{-\alpha \pi_t^e} \quad (1)$$

Donde M es la cantidad nominal de dinero, P el nivel de precios, m la cantidad real de dinero, y es el producto, que normalizaremos a 1, π^e la inflación esperada y α una constante positiva.

Suponga que se desea financiar un déficit fiscal real d por la vía de hacer crecer el dinero nominal en σ . El señoreaje es $\frac{\dot{M}_t}{P_t}$.

- a) Escriba la restricción presupuestaria del gobierno como función de σ y π^e y gráfiquela en el plano (π^e, σ) . Usando la ecuación (1) (diferenciela), determine el estado estacionario y encuentre el valor máximo de d que se puede financiar en estado estacionario por la vía del señoreaje. Denótelo d^M . Suponga que $d < d^M$. ¿Cuántos estados estacionarios hay? Use el gráfico para mostrar su resultado.
- b) Suponga las expectativas son adaptativas:

$$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e) \quad (2)$$

Explique esta ecuación. Diferencie la ecuación (1) y usando (2) para reemplazar la inflación, muestre cuál es la dinámica de la inflación esperada en el gráfico y de los estados estacionarios. Muestre cuál es estable y cuál inestable (asuma que $\beta\alpha < 1$)

- c) Suponga que hay un aumento del déficit de d a d' , siendo ambos menores que d^M . Muestre la dinámica del ajuste (recuerde que σ puede saltar, pero π^e se ajusta lento). Finalmente, suponga que d sube más allá de d^M y muestre que se produce una hiperinflación.
2. Suponga que en el periodo t la utilidad del hogar representativo está dada por $U_t = u(c_t, m_t)$ donde c_t es el consumo per cápita y m_t son los saldos reales per cápita. La utilidad del hogar está dada por

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t)$$

con $\beta \in (0, 1)$. La restricción presupuestaria de la economía será

$$Y_t + \tau_t N_t + (1 - \delta)K_{t-1} + (1 + i_{t-1}) \frac{B_{t-1}}{P_t} + \frac{M_{t-1}}{P_t} = C_t + K_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t}$$

Donde Y_t es el producto agregado, K_{t-1} es el stock de capital agregado al final del periodo $t - 1$, $\tau_t N_t$ es el valor real de las transferencias, N_t es la cantidad de personas en la economía.

- a) Interprete la restricción presupuestaria.

- b) Si $n = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}} = cte$ (tasa de crecimiento de la población constante) y el capital produce de acuerdo a $Y_t = F(K_{t-1}, N_t)$, con F homogénea de grado 1, demuestre que

$$y_t = f\left(\frac{k_{t-1}}{n+1}\right)$$

donde $f(x) = F(x, 1)$ ¹

- c) Escriba la ecuación anterior en términos per cápita y plantee el problema como programación dinámica en función de $w_t \equiv c_t + k_t + m_t + b_t$
- d) Encuentre las condiciones de primer orden del problema anterior. Interprete las expresiones obtenidas.
- e) Encuentre el estado estacionario. ¿Es el dinero neutral o superneutral en este modelo?
- f) Suponga ahora que $U_t = u_t(c_t, m_t, l_t)$, donde l_t es el tiempo de ocio, y la función de producción per capita es $f = f(k_t, 1 - l_t)$ (las día laborable está normalizado a 1). Derive la CPO extra que se obtiene y analice el nuevo estado estacionario. ¿Qué sucede con la neutralidad/superneutralidad del dinero?

¹Las minúsculas representan las variables per cápita

Problema 1

a) Tenemos $d = r \cdot m$ pues $\frac{\dot{M}}{P} = \frac{\dot{M}}{M} \cdot \frac{M}{P} = r \cdot m = d$

luego la restricción presupuestaria del gobierno será

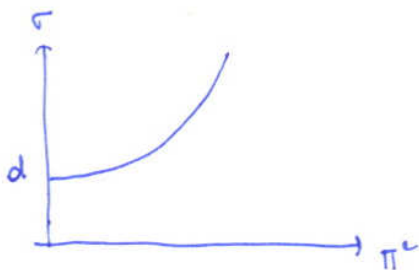
$$d = r_t y_t e^{-\alpha \pi_t^e}$$

$$d = \underset{\uparrow}{r_t} e^{-\alpha \pi_t^e}$$

$y_t = 1$ (por enunciado)

$$r_t = d e^{\alpha \pi_t^e}$$

En el plano (π^e, r) la restricción será

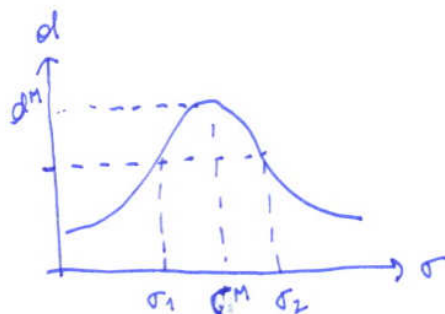


En estado estacionario $\dot{m} = 0 \Rightarrow -\alpha \pi^e e^{-\alpha \pi^e} = 0 \Rightarrow \pi^e = 0$

Por otro lado tenemos que $\dot{m} = r \cdot m - \pi m \Rightarrow r = \pi$

luego, el señoreaje será $S = r e^{-\alpha r}$ y se maximiza para $r^M = \frac{1}{\alpha}$

y $d^M = \frac{1}{\alpha e}$



Si $d < d^M$ hay dos puntos estacionarios para los cuales se puede financiar la deuda.

b)

$$\dot{m} = -\alpha \dot{\pi}^e e^{-\alpha \pi^e} = -\alpha \dot{\pi}^e m = (\sigma - \pi) \cdot m$$

$$\Rightarrow \alpha \dot{\pi}^e = \pi - \sigma \Rightarrow \sigma + \alpha \dot{\pi}^e = \pi$$

De (2) se tiene que

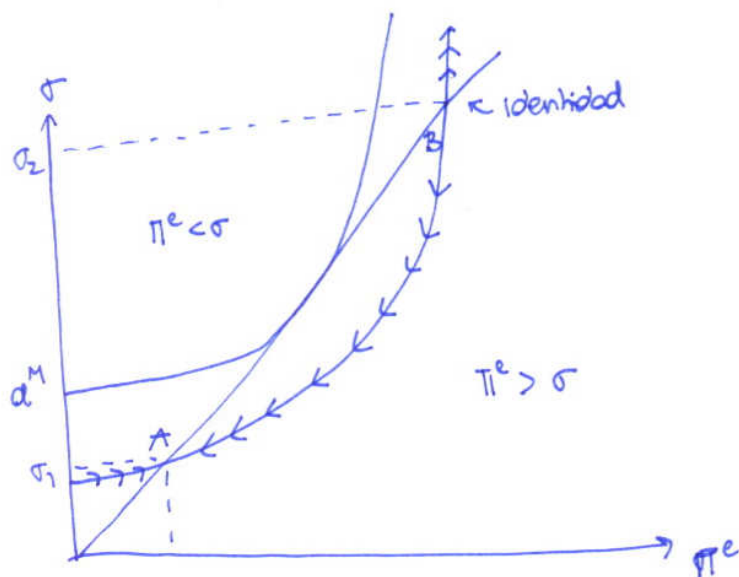
$$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e) \Rightarrow \pi = \frac{\dot{\pi}^e}{\beta} + \pi^e$$

Iguando se obtiene

$$\alpha \dot{\pi}^e + \sigma = \frac{\dot{\pi}^e}{\beta} + \pi^e$$

$$\dot{\pi}^e \left(\frac{1}{\beta} - \alpha \right) = -\pi^e + \sigma$$

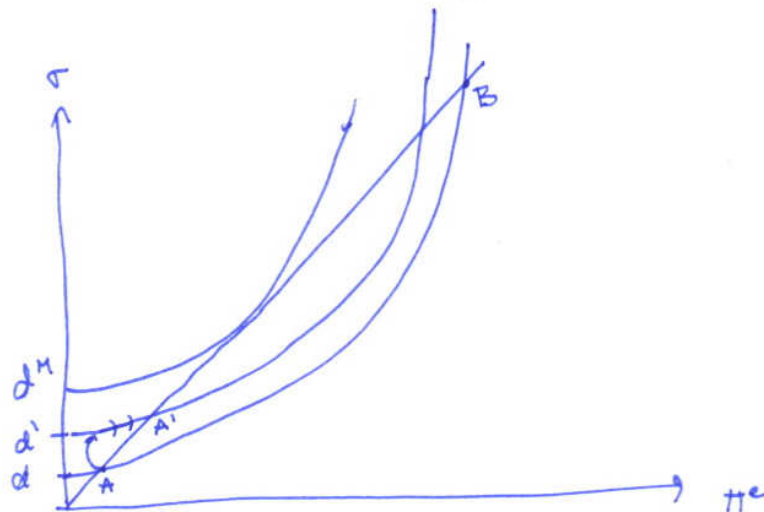
$$\dot{\pi}^e = \frac{\beta}{(1 - \beta\alpha)} (\sigma - \pi^e) \quad \text{ecuación de dinámica de } \pi^e$$



Se puede ver de la ecuación de dinámica de π^e que A será estable y B será inestable.

c) Dinámica de ajuste

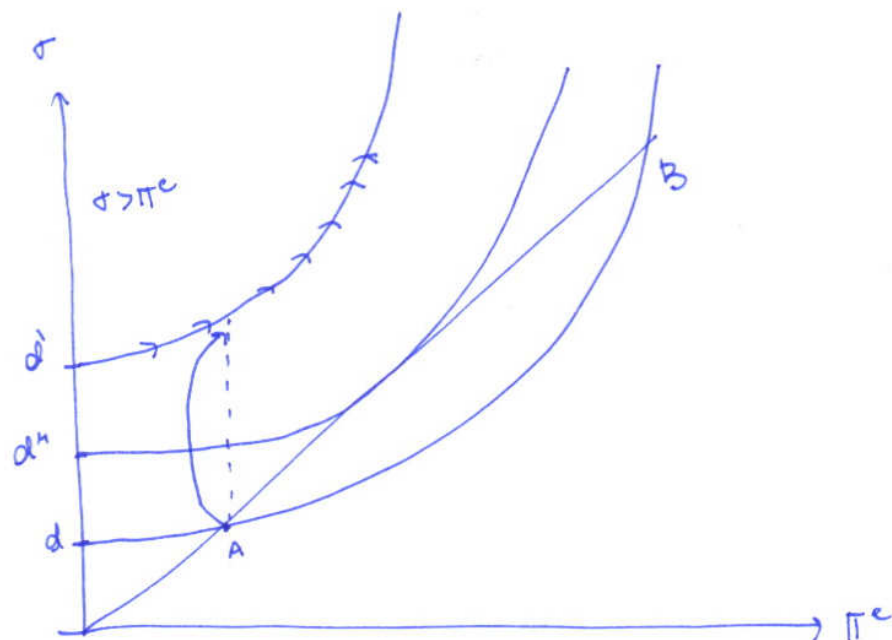
Si el déficit aumenta de d a d' con $d, d' < d^M$



Si inicialmente se estaba en A , ocurre un salto en σ y luego se converge a A' que será el nuevo equilibrio estable

Si inicialmente se estaba en B ocurre un salto en σ para financiar el nuevo déficit pero ya no se podrá alcanzar un nuevo equilibrio estacionario y tanto π^e como σ seguirán creciendo indefinidamente

Si d aumenta a d' y $d' > d^M$



Si inicialmente se está en A ocurre instantáneamente un salto hacia la curva del nuevo déficit, sobre esta curva tanto π^e como σ aumentan indefinidamente con lo cual se produce una hiperinflación (análogo es lo que ocurre si se estaba en B).

Problema 2

a) El hogar distribuye su riqueza entre consumo, inversión en capital, acumulación de dinero y bonos

b) $Y_t = F(K_{t-1}, N_t)$

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = F\left(\frac{K_{t-1}}{N_t}, 1\right) = F\left(\frac{K_{t-1}}{N_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_t}, 1\right)$$

pero $\frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}} + 1 = 1+n = \frac{N_t}{N_{t-1}} = F\left(\frac{k_t}{1+n}, 1\right) = f\left(\frac{k_t}{1+n}\right)$

c) la restricción presupuestaria del hogar será

$$f\left(\frac{k_{t+1}}{1+n}\right) + Z_t + \left(\frac{1-d}{1+n}\right) k_{t-1} + \frac{(1+i_{t-1})b_{t-1} + m_{t-1}}{(1+\pi_t)(1+n)} =$$

$$c_t + k_t + m_t + b_t \equiv w_t$$

con $b_t = \frac{B_t}{P_t N_t}$ $m_t = \frac{M_t}{P_t N_t}$

El problema como programación dinámica será

$$V(w_t) = \max \{ u(c_t, m_t) + \beta V(w_{t+1}) \}$$

s.a $w_{t+1} = f\left(\frac{k_t}{1+n}\right) + Z_{t+1} + \left(\frac{1-d}{1+n}\right) k_t$

d) reemplazando $k_t = w_t - c_t - m_t - b_t$ se obtiene

$$V(w_t) = \max \left\{ u(c_t, m_t) + \beta V \left(\frac{w_t - c_t - m_t - b_t}{1+n} \right) + z_{t+1} + \left(\frac{1-d}{1+n} \right) (w_t - c_t - m_t - b_t) + \frac{(1+it)b_t + m_t}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} \right\}$$

Este es un problema de optimización dinámica, sin restricciones, en función de c_t, m_t, b_t

CPD

cr a c

$$u_c(c_t, m_t) + \beta \left[-\frac{1}{1+n} f_k \left(\underbrace{\frac{w_t - c_t - m_t - b_t}{1+n}}_{\frac{k_t}{1+n}} \right) - \left(\frac{1-d}{1+n} \right) \right] V_w(w_{t+1}) = 0$$

cr a m

$$u_m(c_t, m_t) + \beta \left[-\frac{1}{1+n} f_k \left(\frac{k_t}{1+n} \right) - \left(\frac{1-d}{1+n} \right) + \frac{1}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} \right] V_w(w_{t+1}) = 0 \quad (2)$$

cr a b

$$\beta V_w(w_{t+1}) \left[-\frac{1}{1+n} f_k \left(\frac{k_t}{1+n} \right) - \left(\frac{1-d}{1+n} \right) + \frac{(1+it)}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} \right] = 0 \quad (3)$$

Por teorema de la envolvente se tiene que

$$u_c(c_t, m_t) = V_w(w_t) \quad (4)$$

$$\Rightarrow u_c(c_{t+1}, m_{t+1}) = V_w(w_{t+1})$$

en (2) se obtiene

$$U_m(c_t, m_t) - \frac{\beta}{1+n} \left[f_k \left(\frac{k_t}{1+n} \right) + (1-\delta) \right] U_c(c_{t+1}, m_{t+1}) +$$

$$\frac{\beta}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} U_c(c_{t+1}, m_{t+1}) = 0$$

de (1)

$$U_c(c_t, m_t) = \frac{\beta}{1+n} \left[f_k \left(\frac{k_t}{1+n} \right) + (1-\delta) \right] U_c(c_{t+1}, m_{t+1})$$

$$\Rightarrow U_m(c_t, m_t) - U_c(c_t, m_t) + \frac{\beta}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} U_c(c_{t+1}, m_{t+1}) = 0$$

Esta ecuación indica que la utilidad marginal de aumentar el dinero debe ser igual a la utilidad marginal del consumo. El dinero entrega utilidad marginal U_m , pero además entrega, en términos reales, per cápita $\frac{1}{(1+\pi_{t+1})(1+n)}$ para consumo en el

periodo siguiente $(t+1)$, lo cual, en términos del periodo t equivale a $\frac{\beta}{(1+\pi_{t+1})(1+n)}$

la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \left[\frac{1}{(1+\pi_{t+1})(1+n)} \right] \rightarrow \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_c(c_t, m_t)}$$

de (1)

$$\frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_c(c_t, m_t)} = \frac{1+n}{\rightarrow \left[f\left(\frac{k_t}{1+n}\right) + 1-d \right]}$$

de (3)

$$\left[\frac{f\left(\frac{k_t}{1+n}\right) + 1-d}{1+n} \right] = \frac{1+i_t}{(1+\pi_{t+1})(1+n)}$$

$$\Rightarrow \frac{u_c(c_{t+1}, m_{t+1})}{u_c(c_t, m_t)} = \frac{1}{\rightarrow (1+i_t)} \quad (1+\pi_{t+1})(1+n)$$

$$\Rightarrow \frac{u_m(c_t, m_t)}{u_c(c_t, m_t)} = 1 - \frac{1}{1+i_t} = \underbrace{\frac{i_t}{1+i_t}}$$

este término se interpreta como el precio relativo del dinero real, en términos del bien de consumo hoy

(en términos de costo de oportunidad)

- e) En estado estacionario $n=0$ y la oferta de dinero crece a tasa constante igual a θ

las ecuaciones quedan

$$u_c(c', m') - \beta [f_k(k') + 1 - \delta] v_w(w') = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1+i'}{1+\theta} - [f_k(k') + (1-\delta)] = 0 \quad (6)$$

$$u_m(c', m') - \beta [f_k(k') + 1 - \delta] v_w(w') + \frac{\beta v_w(w')}{1+\theta} = 0 \quad (7)$$

donde c', m', k' y w' serán las variables en estado estacionario

la restricción presupuestaria queda

$$f(k') + z' + (1-\delta)k' + \frac{m'}{1+\theta} = c' + k' + m'$$

Esto último pues

- 1) en equilibrio se tiene $\pi' = \theta$ (un valor constante de balances reales exige $\pi' = \theta$)

- 2) Como las tenencias de bonos deben ser constantes, todos los hogares son iguales y el agregado de bonos debe ser 0 (algunos prestan y otros piden prestado) se tendrá que $b' = 0$

Neutralidad

El dinero sólo aparece en m , es decir, un cambio en M que tenga un cambio en la misma proporción en P no afecta el equilibrio de la economía, es decir hay neutralidad del dinero.

de (4) y (5) se tiene

$$f_k(k') = \frac{1}{\beta} - 1 + d$$

En equilibrio se debe tener además

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{M_t - M_{t+1}}{P_t} \\ &= m_t - \frac{m_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = m - \frac{m'}{1+\theta} = \frac{\theta m'}{1+\theta}$$

reemplazando en restricción presupuestaria se obtiene

$$c = f(k') - \delta k'$$

Es decir, las variables reales no son afectadas por el crecimiento de los saldos nominales (θ), con lo cual el dinero será superneutral.

f)

la CPO de la nueva variable en estado estacionario será

$$u_e(c', m', l') - \beta f_e(k', 1-l') \quad V_w(w') = 0$$

(f_e : derivada de f
de la segunda
variable)

$$\Rightarrow \frac{u_e(c', m', l')}{u_c(c', m', l')} = \beta f_e(k', 1-l')$$

En este caso un cambio en la tasa de inflación puede afectar las variables reales. Un aumento en la tasa de inflación reduce las tenencias de saldos monetarios reales, si esto afecta u_e , cambiará l' , lo cual cambiará k' , m' y c' .