UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Modelos de participación de mercado

IN58B

Ingeniería de Marketing

Nicolás Fritis
Emilio Polit
Mauricio Ramírez
William Young

Basado en material preparado por M.Goic y M.Bosch

Modelos estocásticos agregados

Modelos estocásticos

- Estos modelos están muy asociados a lo que vimos como modelos estocásticos de compra del consumidor.
- Buscamos modelos que describan adecuadamente el comportamiento agregado de los consumidores.
- Vimos un modelo respecto a los instantes de compra de los consumidores (Modelo de incidencia de compra). Ahora el foco corresponde al estudio de las participaciones de mercado.

Definiciones preliminares$_{(1)}$

- **Datos de Panel:** Seguimiento de las marcas compradas por una muestra identificable de consumidores.

Datos Panel	T1	T2	T3	T4	T5
C001	A	A	A	B	A
C002	A	C	B	A	B
C003	A	B	B	B	A

- **Matrices de intercambio de marcas (Brand Switch):** Registros derivado de datos de panel que indican como los consumidores cambian de marcas de un periodo a otro.

Compras	T+1			
	A	B	C	Total
T				
To				

Conjunta	T+1			
	A	B	C	Total
T				
To				

Condicional		T+1			
		A	B	C	Total
T	A	0.675	0.232	0.094	1.000
	B	0.177	0.772	0.052	1.000
	C	0.282	0.128	0.590	1.000

Definiciones preliminares$_{(2)}$

- Se definen:

$$\left.\begin{aligned} P(i \mid j) &= \mathrm{P}(\text{comprar } i \text{ en } t+1 \mid \text{compra } j \text{ en } t) \\ P(i, j) &= \mathrm{P}(\text{comprar } j \text{ en } t \text{ y comprar } i \text{ en } t+1) \\ P(j) &= \mathrm{P}(\text{comprar } j \text{ en } t+1) \end{aligned}\right\} \mathrm{P}(i \mid j) = \frac{\mathrm{P}(i, j)}{\mathrm{P}(j)}$$

- Notar que:

$$\sum_i \mathrm{P}(i \mid j) = 1 \qquad \text{(ley probabilidad)}$$

$$\sum_j \mathrm{P}(i, j) = \mathrm{P}(i) = m_i \quad \text{(market share)}$$

Modelo Ehremberg (Orden 0)

- Basado en observaciones empíricas, Ehremberg postuló que:

$$\mathrm{P}(i, j) = k \cdot m_i \cdot m_j$$

- Con esto:

$$\mathrm{P}(i,i) = m_i - k \cdot m_i (1 - m_i)$$

La lealtad depende sólo de la participación de mercado

$$\mathrm{P}(i \mid j) = \begin{cases} k \cdot m_i & i \neq j \\ 1 - k(1 - m_i) & i = j \end{cases}$$

La compra actual no depende de la compra anterior

Calibración

- Para la calibración del modelo requerimos:
  - Participaciones de mercado del último periodo (m_i)
  - Probabilidad de compra repetitiva para cada marca ($\mathrm{P}(i,i)$).

$$k = \frac{1-\sum_i \mathrm{P}(i,i)}{1-\sum_i m_i^2}$$

- El valor de k indica algunas características del mercado:
  - Mercado maduro $k \approx 0.5$
  - Mercado de lealtad $k << 1$

Uso de gestión

- La capacidad predictiva es bastante baja (un modelo de orden cero asume implícitamente cierta estabilidad en el mercado).
- La aplicación más directa corresponde a la validación de los supuestos por medio de la comparación de las matrices de Brand Switch reales y teóricas:
  – Los consumidores compran como en un modelo de atracción.
  – Los consumidores son de orden 0 (no importa que compraron en el pasado).

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Ejemplo$_{(1)}$

Compras		T+1				
		A	B	C	Total	mi
T	A	137	47	19	203	0.396
	B	41	179	12	232	0.452
	C	22	10	46	78	0.152
Total		200	236	77	513	1.000

Conjunta (real)		T+1			
		A	B	C	Total
T	A	0.267	0.092	0.037	0.396
	B	0.080	0.349	0.023	0.452
	C	0.043	0.019	0.090	0.152
Total		0.390	0.460	0.150	1.000

$$k = \frac{1-(0.267+0.349+0.090)}{1-(0.396^2+0.452^2+0.152^2)}$$
$$= 0.478$$

Ejemplo$_{(2)}$

Conjunta (real)		T+1			
		A	**B**	**C**	**Total**
T	**A**	0.267	0.092	0.037	0.396
	B	0.080	0.349	0.023	0.452
	C	0.043	0.019	0.090	0.152
Total		0.390	0.460	0.150	1.000

Conjunta (teórica)		T+1			
		A	**B**	**C**	**Total**
T	**A**	0.281	0.086	0.029	0.396
	B	0.086	0.334	0.033	0.452
	C	0.029	0.033	0.090	0.152
Total		0.396	0.452	0.152	1.000

$$\begin{cases} \mathrm{P}(i,j) = k \cdot m_i \cdot m_j \\ \mathrm{P}(i,i) = m_i - k \cdot m_i (1 - m_i) \end{cases}$$

Ejemplo$_{(3)}$

Condicional (real)		T+1			
		A	B	C	Total
T	A	0.675	0.232	0.094	1.000
	B	0.177	0.772	0.052	1.000
	C	0.282	0.128	0.590	1.000

Condicional (teórica)		T+1			
		A	B	C	Total
T	A	0.711	0.216	0.073	1.000
	B	0.189	0.738	0.073	1.000
	C	0.189	0.216	0.595	1.000

$$P(i \mid j) = \begin{cases} k \cdot m_i & i \neq j \\ 1 - k(1 - m_i) & i = j \end{cases}$$

Modelo Markoviano$_{(1)}$

- **Supuesto:** La probabilidad de comprar una determinada marca depende solo de la marca comprada en el periodo anterior.
- Sea Y_t la marca elegida en el periodo t. Luego los supuestos se reducen a:

$$\mathrm{P}\{Y_t = k \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_0\} = \mathrm{P}\{Y_t = k \mid Y_{t-1}\}$$ Propiedad markoviana

$$\mathrm{P}\{Y_t = k \mid Y_{t-1}\} = \mathrm{P}\{Y_{t+n} = k \mid Y_{t+n-1}\}$$ Incrementos estacionarios

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Modelo Markoviano$_{(2)}$

- Sea una matriz de probabilidad $\mathrm{P}=\{p_{ij}\}_{ij}$, donde p_{ij} es la probabilidad que un consumidor compre j dado que en el periodo actual compró i.
- Sea m_{it} la probabilidad de comprar la marca i en el periodo t. Entonces:

$$m_{it} = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} m_{jt-1} \qquad i = 1 \ldots n$$

$$m_{i\infty} : \quad m_{\infty} = m_{\infty} \cdot \mathrm{P} \qquad \sum_i m_{i\infty} = 1$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Modelo de aprendizaje

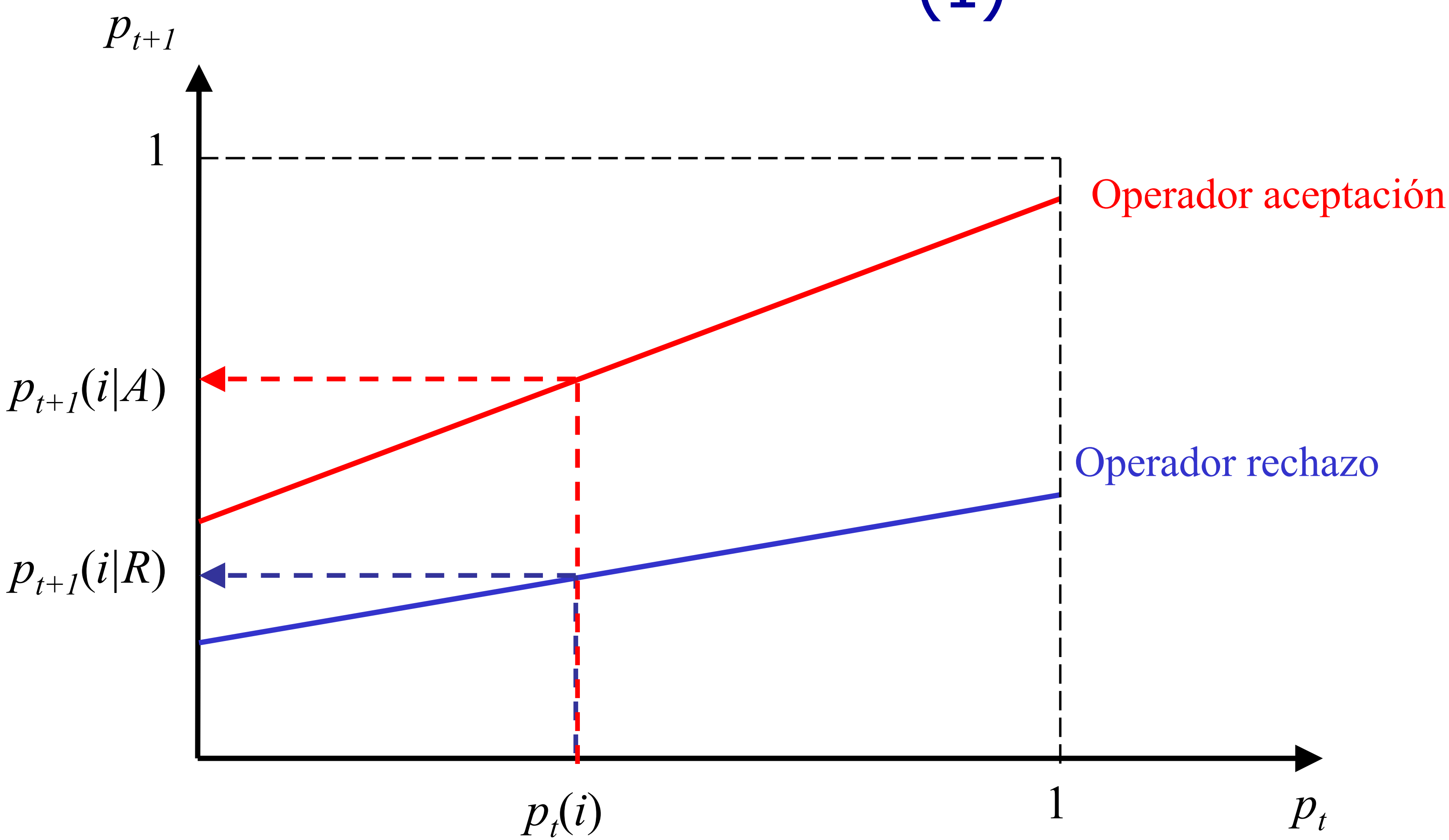
- **Supuesto:** La compra de la marca aumenta la probabilidad de repetirla mientras que la no compra la disminuye.
- Modelo básico con 2 marcas. Sea p_t la probabilidad de comprar la marca de interés en el periodo t. El modelo:

$$p_t = \begin{cases} \alpha_1 + \lambda_1 p_{t-1} & \text{si se elije marca en t} \\ \alpha_2 + \lambda_2 p_{t-1} & \sim \end{cases}$$

Operador aceptación

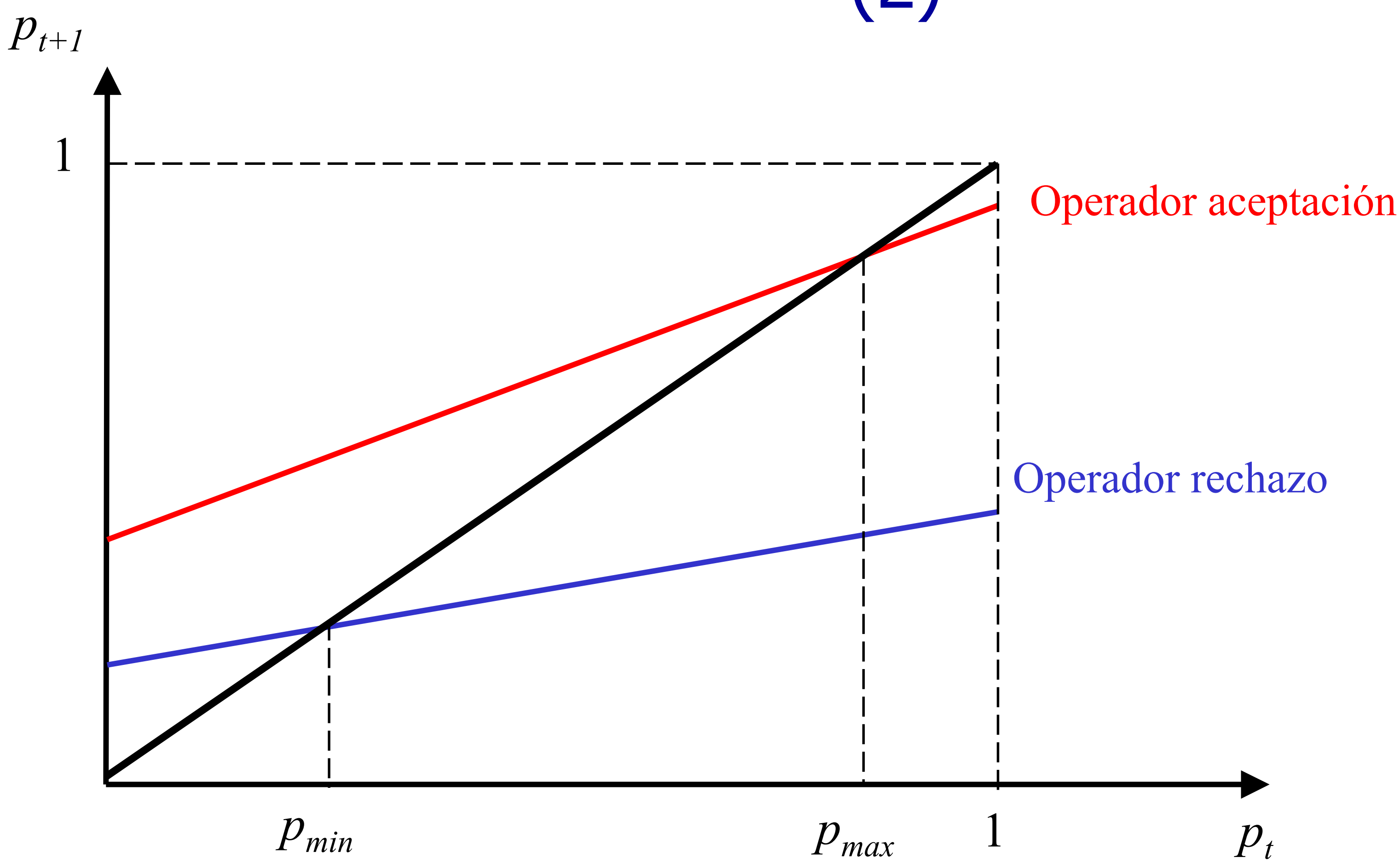
Operador rechazo

Gráficamente$_{(1)}$



¿Qué ocurre si no compra nunca el producto?
¿Qué ocurre si compra siempre el producto?

Gráficamente$_{(2)}$



¿Cómo interpretar los parámetros del modelo?

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Modelos basados en la competencia

Definiciones básicas

- La definición del mercado y del conjunto de marcas a considerar dependerán del contexto:
  - Ej: mercados de las zapatillas o de las zapatillas para deporte o de las zapatillas para jugar fútbol o…
- Consideremos.
  - Participación de mercado (market share) de la marca i (s_i).
  - Ventas del producto i, típicamente medidas en unidades (Q_i).
  - Ventas totales de los productos del mercado (Q).
  - Número de marcas en el mercado (m).

$$s_i = \frac{Q_i}{Q} = \frac{Q_i}{\sum_{j=1}^{m} Q_j}$$

Enfoque de esfuerzos de marketing$_{(1)}$

- **Premisa básica:** la participación de mercado de una marca i es proporcional a su esfuerzo de marketing M_i (Kotler, 1984):

$$s_i = k \cdot M_i \qquad \sum_i s_i = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sum_i M_i}$$

- **Teorema fundamental de la participación de mercado:** "La participación de mercado de cada marca es proporcional a su porción total del esfuerzo de marketing".

$$s_i = \frac{M_i}{\sum_i M_i}$$

Enfoque de esfuerzos de marketing$_{(2)}$

- Los esfuerzos son independientes de los resultados. Podemos introducir un coeficiente de efectividad por marca α_i:

$$s_i = \frac{\alpha_i M_i}{\sum_j \alpha_j M_j}$$

- Hasta ahora no hemos dicho mucho: necesitamos explicitar que queremos decir con *esfuerzo de marketing*. Según Kotler, es función del marketing mix actual y previo.

$$M_i = f\left(\text{precio}_i, \text{publicidad}_i, \text{ditribucion}_i, \ldots\right)$$

Esfuerzos de marketing

- Se han propuesto varias formas funcionales. Consideremos:
  - Precio del producto de la marca i, P_i.
  - Gasto en publicidad de la marca i, A_i.
  - Esfuerzo en distribución de la marca i (por ejemplo, número de tiendas), D_i.

$$M_i = \exp\left(pP_i + aA_i + dD_i + \ldots \right)$$
$$M_i = P_i^p A_i^a D_i^d \ldots$$

- La primera forma corresponde a la versión más simple del **MNL** (multinomial logit), mienttras que la segunda corresponde a **MCI** (multiplicative, competitive-interaction).

Enfoque de atracción de marcas

- **Premisa básica:** El único determinante al momento de realizar la compra es la atracción que ejerce la marca sobre los consumidores (Bell, Kenney y Little 1975):
- La atracción que ejerce una marca i (A_i) debe cumplir con una serie de axiomas:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Ax1:} & A_i \geq 0 \, \forall i \wedge \sum_i A_i > 0 \\
\text{Ax2:} & A_i = 0 \Rightarrow s_i = 0 \\
\text{Ax3:} & A_i = A_j \Rightarrow s_i = s_j \\
\text{Ax4:} & \text{Si } A_j \text{ cambia, el cambio en } s_i \text{ es independiente de } j
\end{array}\right\} \quad s_i = \frac{A_i}{\sum_i A_i}$$

Modelos de participación de mercado$_{(1)}$

- Consideremos:
  - Valor de la variable explicativa k de la marca i (x_{ki}).
  - Parámetro de influencia constante de la marca i (α_i).
  - Parámetro a ser estimado (β_k).
  - Error (ε_i)

$$\left.\begin{aligned} \text{MCI:} \quad & A_i = \exp(\alpha_i)\prod_k x_{ki}^{\beta_k}\varepsilon_i \\ \text{MNL:} \quad & A_i = \exp\left(\alpha_i + \sum_k \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i\right) \end{aligned}\right\} \quad s_i = \frac{A_i}{\sum_i A_i}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Modelos de participación de mercado$_{(2)}$

- Existen otros modelos de participación de mercado en que no importan los competidores:

$$s_i = \alpha_i + \sum_k \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \qquad \text{lineal}$$

$$s_i = \exp(\alpha_i) \prod_k x_{ki}^{\beta_k} \varepsilon_i \qquad \text{multiplicativo}$$

$$s_i = \exp\left(\alpha_i + \sum_k \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i\right) \qquad \text{exponencial}$$

- Naert & Bultez (1973), plantean 2 requerimientos de consistencia lógica que estos modelos no cumplen:
  - $s_i \geq 0$.
  - $\Sigma_i s_i = 1$.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Calibración de parámetros

- La calibración de parámetros se puede hacer usando regresiones lineales para lo cual se deben linealizar (log-centering) las expresiones.

$$\text{MCI:} \quad \ln\left(\frac{s_i}{\bar{s}}\right) = \alpha_i^* + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \ln\left(\frac{x_{ki}}{\bar{x}}\right) + \varepsilon_i^* \qquad \text{con} \qquad \alpha_i^* = \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)$$

$$\varepsilon_i^* = \ln\left(\frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}\right)$$

$$\text{MNL:} \quad \ln\left(\frac{s_i}{\bar{s}}\right) = \alpha_i^* + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \left(x_{ki} - \bar{x}\right) + \varepsilon_i^* \qquad \text{con} \qquad \alpha_i^* = \left(\alpha_i - \bar{\alpha}\right)$$

$$\varepsilon_i^* = \left(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}\right)$$

Elasticidades de MS$_{(1)}$

- **Definición:** Corresponde al cambio relativo en la participación de mercado ante la variación en una variable del marketing mix.

$$e_{s_i} = \frac{\Delta s_i / s_i}{\Delta x_{ki} / x_{ki}} = \frac{\Delta s_i}{\Delta x_{ki}} \frac{x_{ki}}{s_i}$$

- En la práctica es muy difícil aislar los efectos para una medición empírica. Para encontrar una elasticidad debemos asumir un modelo, calibrarlo y calcular las elasticidades punto:

$$e_{s_i} = \frac{\partial s_i}{\partial x_{ki}} \frac{x_{ki}}{s_i}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Elasticidades de $MS_{(2)}$

- Siguiendo este esquema podemos calcular elasticidades para cada uno de los modelos propuestos:

$e_{s_i} = (\beta_k x_{ki})/s_i$	lineal
$e_{s_i} = \beta_k$	multiplicativo
$e_{s_i} = \beta_k x_{ki}$	exponencial
$e_{s_i} = \beta_k (1 - s_i)$	MCI
$e_{s_i} = \beta_k (1 - s_i) x_{ki}$	MNL

Propiedades elasticidad

- ¿Qué propiedades debiera cumplir una elasticidad de participación de mercado?

$$1.\ e_{Q_i x_j} = e_{Q x_j} + e_{s_i x_j}$$

$$2.\ \text{Si } s_i \text{ creciente en } x_j \Rightarrow \text{Lim}_{s_i \to 1} e_{s_i x_j} = 0$$ Se satura el mercado

$$3.\ \text{Si } s_i \text{ creciente en } x_j \Rightarrow \text{Lim}_{x \to \infty} e_{s_i x_j} = 0$$ Se satura el recurso

- Se puede demostrar que todos los modelos cumplen con propiedad 1, pero modelos lineal, multiplicativo y exponencial no satisfacen 2 y 3.

MCI vs. MNL

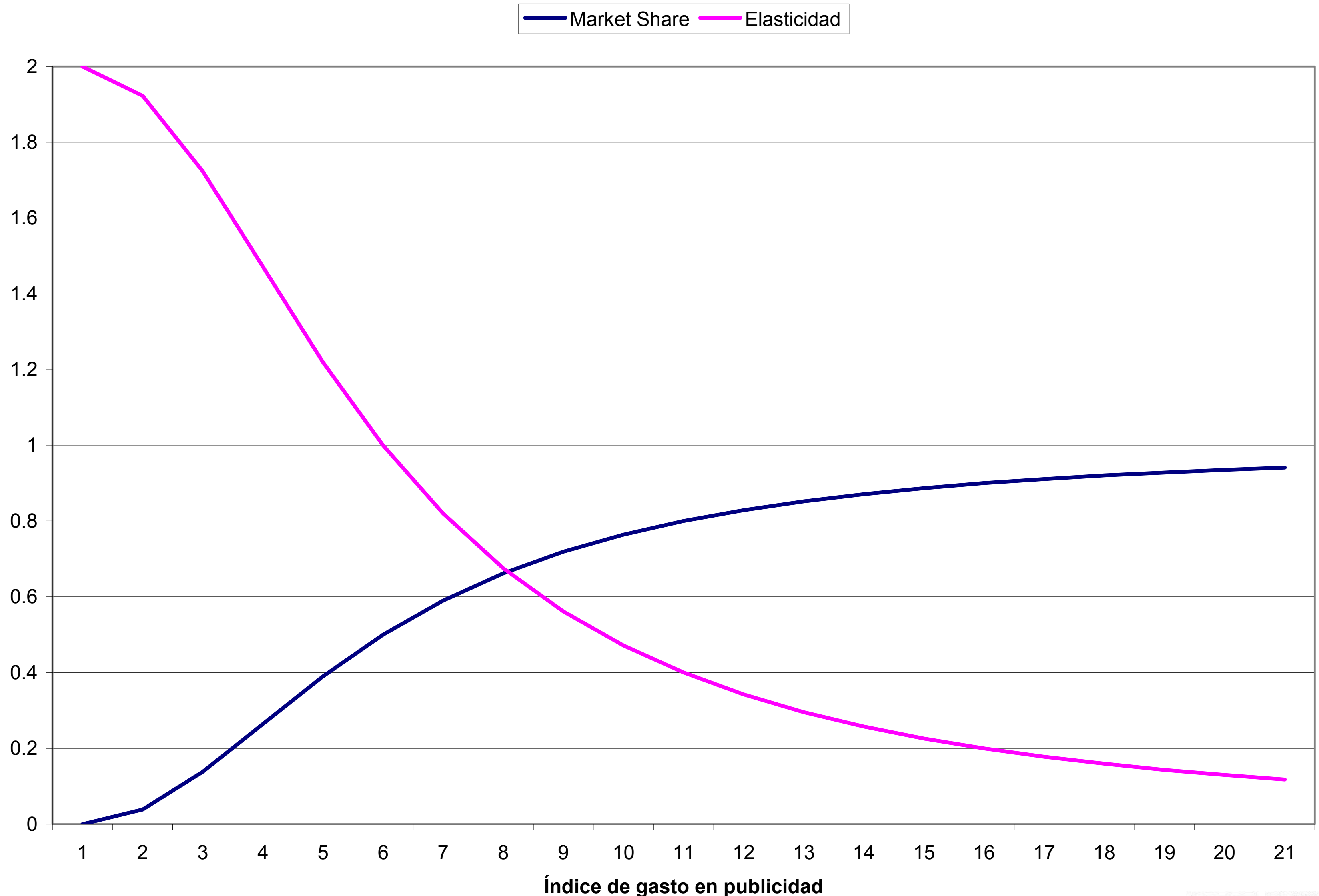
- Hemos visto razones por las cuales preferir MNL o MCI frente a modelos lineales, multiplicativo o exponenciales. Pero, ¿Cuándo usar MCI y cuándo usar MNL?

- A pesar de ser conceptualmente muy distintos, si miramos numéricamente los resultados de las participaciones de mercado, los comportamientos son muy similares. Las diferencias aparecen al observar las elasticidades:

  – ¿Cómo debiera ser el comportamiento para valores bajos de la variable explicativa?
  – ¿depende del mercado o del atributo?

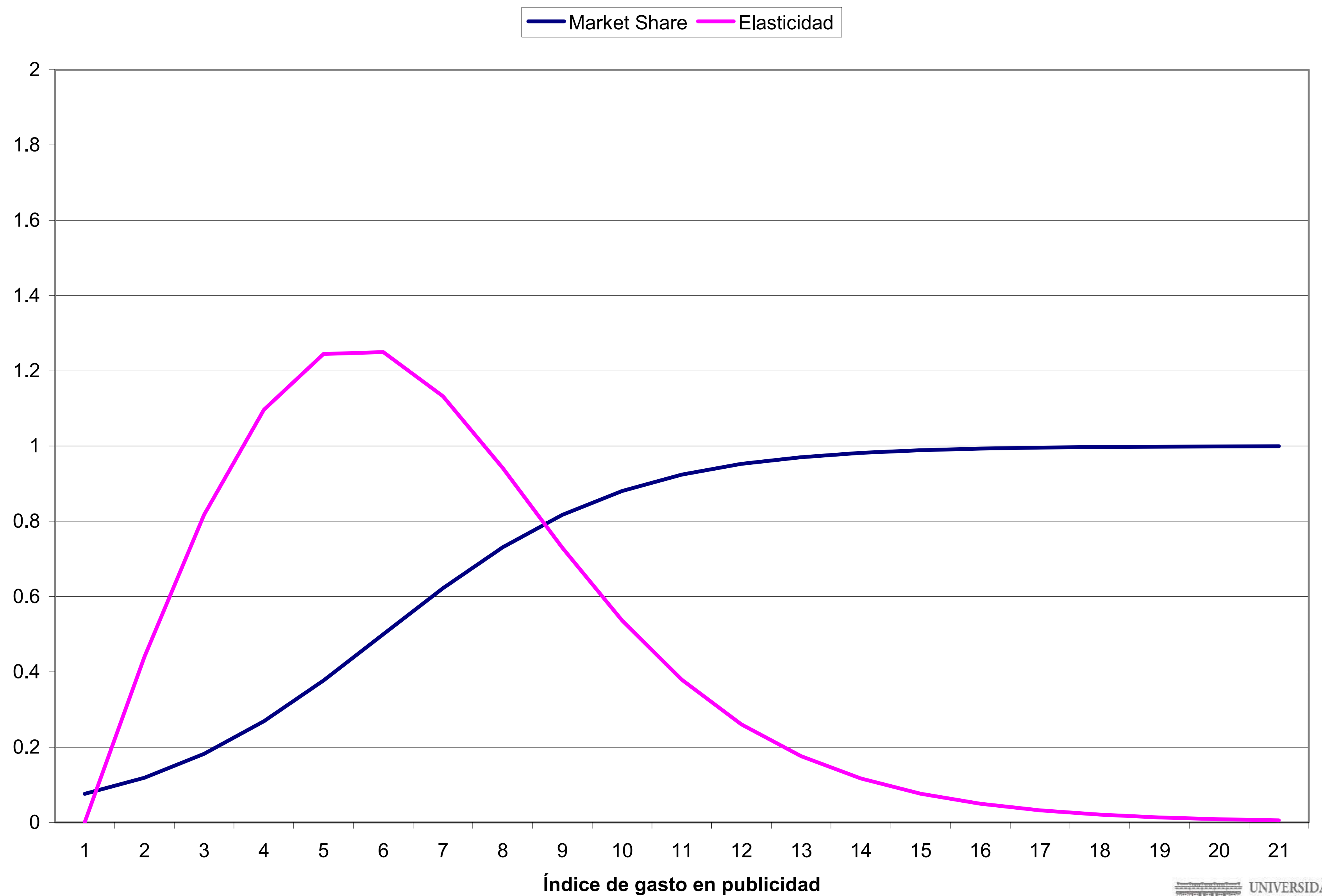
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

MCI



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

MNL



Market Share
Elasticidad
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
Índice de gasto en publicidad

Modelo general de atracción

- Podemos formular un modelo en que algunos efectos sean del tipo MCI y otros del tipo MNL.

$$\text{MGA: } A_i = \exp(\alpha_i + \varepsilon_i) \prod_{k=1}^{K} f_k(x_{ki})^{\beta_k}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} x & \text{MCI} \\ \exp(x) & \text{MNL} \end{cases}$$

Extensiones$_{(1)}$

- El parámetro de efectividad α_i es propio de cada marca, pero independiente de las acciones especificas que tome.
- Una marca podría ser más efectiva en algunas variables del marketing mix.
- Podemos hacer que el parámetros β dependa de la marca.

$$\text{MGA: } A_i = \exp\left(\alpha_i + \varepsilon_i\right)\prod_{k=1}^{K} f_k\left(x_{ki}\right)^{\beta_{ki}}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Extensiones$_{(2)}$

- Elasticidades cruzadas: $$e_{s_i \cdot j} = \frac{\partial s_i / s_i}{\partial x_{kj} / x_{kj}} = \frac{\partial s_i}{\partial x_{ki}} \frac{x_{ki}}{s_i}$$

$$\left.\begin{array}{ll} e_{s_i \cdot j} = -\beta_{kj} s_j & \text{MCI} \\ e_{s_i \cdot j} = -\beta_{kj} x_k s_j & \text{MNL} \end{array}\right\}$$

Problema IIA!
(Revisar Axioma 4)

- Definimos un parámetro de competitividad cruzada de la variable x_{kj} sobre la marca i (β_{kij}).

$$\text{MGA: } A_i = \exp(\alpha_i + \varepsilon_i) \prod_{k=1}^{K} f_k(x_{ki})^{\beta_{kij}}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Modelos de participación de mercado

IN58B

Ingeniería de Marketing

Nicolás Fritis
Emilio Polit
Mauricio Ramírez
William Young

Basado en material preparado por M.Goic y M.Bosch