UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN56A-02
Semestre: Otoño 2003
Prof: José Miguel Cruz
Aux: Francisco Errandonea
Andrés Liberman

Guía Examen: Teoría de opciones

Aspectos generales

A diferencia de los contratos futuros y los forwards las opciones no obligan a realizar la operación en el futuro. Son, por lo tanto, un acuerdo entre dos partes para tener la alternativa (opción) de comprar/vender un bien a un precio especificado en una fecha futura. Es por esto que , a diferencia de los otros derivados vistos anteriormente, el valor de una opción es distinto de cero.

Como el que adquiere la opción no entra en un contrato obligado, entonces sólo ejercerá la opción cuando tenga un flujo de caja positivo.

Existen dos tipos de opciones:

- **Opción de compra o call:** Da el derecho, pero no la obligación, a comprar un activo a un precio especificado (que se conoce como precio de ejercicio) en una fecha (fecha de maduración).
- **Opción de venta o put:** Da el derecho, pero no la obligación, a vender un activo a un precio de ejercicio en una fecha de maduración.

Desde el punto de vista de su estructura las opciones se pueden dividir en:

- **Opciones europeas**: Sólo pueden ser ejercidas en el momento de su fecha de vencimiento. Por ejemplo, si tengo una opción call europea sobre una acción de Copec en tres meses más, sólo puedo decidir si la compro o no en tres meses más y no antes.
- **Opciones americanas**: Al contrario de la anterior puede ser ejercida en cualquier momento antes de su vencimiento. Siguiendo el ejemplo anterior si la opción call es americana, entonces en cualquier día desde hoy hasta 3 meses más puedo decidir ejercer la opción y por lo tanto comprar la acción.

Es necesario mencionar que la denominación de americanas o europeas no tiene nada que ver con el lugar geográfico donde se transa la opción.

Identificación de términos y flujos

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

S (t) : Precio del activo subyacente, en un período t, sobre el cual fue escrita la opción.

K : Precio de ejercicio o “strike”.

T : Fecha de vencimiento o maduración.

Para decidir si se ejerce o no una opción lo que se hace es comparar S(t’) con K y se ve si hay un flujo de caja positivo. Cuando esto sucede se dice que la opción está “in the money” y en caso contrario es “out of money”.

El flujo de caja de las opciones de compra y venta son en un período t[1]:

Call: C(t) = max(0,S(t)-K) . Se ejerce sólo si el precio del activo subyacente es mayor al de ejercicio.

Put: P(t)=max(0,K-S(t)). El inverso de la call.

Por lo tanto

	S<K	S=K	S>K
Call	Out of the money	At the money	In the money
Put	In the money	At the money	Out of the money

Modelo de árboles binomiales

Es un modelo que trata de identificar las posibles trayectorias de precios del activo subyacente y así evaluar el precio de la opción.

Sea:

u = 1 + tasa de retorno si el precio de la acción sube, con probabilidad q

d= 1 + tasa de retorno si el precio de la acción baja, con probabilidad 1-q

r* = 1 + tasa de interés de colocación y captación

Con d<r*<u

Entonces si tenemos el precio spot del activo subyacente, S, podemos estimar en el próximo periodo que el precio de la acción sería:

$$S \nearrow S_u = u*S \quad \text{si la acción subiera}$$
$$S \searrow S_d = d*S \quad \text{si la acción bajara}$$

Esto nos permite analizar el comportamiento de la opción que está escrita sobre el activo que estamos analizando. Entonces tendríamos que los flujos de una call serían:

$$C \nearrow C_u = \max(0,uS-K) \quad \text{si la acción subiera}$$
$$C \searrow C_d = \max(0,dS-K) \quad \text{si la acción bajara}$$

Para analizar el valor de la opción hay que calcular el valor presente de los flujos, pero para esto no se ocupan las probabilidades de aumento o baja del precio del activo ya que los retornos futuros de su precio ya están reflejados en el precio actual del activo. Por ejemplo el precio actual de una acción ya tiene incluida la información sobre cuales van a ser sus retornos futuros. Por esto se definen lo que se conoce como **probabilidades neutrales al riesgo**, las cuales se definen como (la explicación de donde vienen es un poco larga y no viene mucho al caso):

$p = \dfrac{r^* - d}{u - d}$, como d<r*<u entonces 0<=p<=1

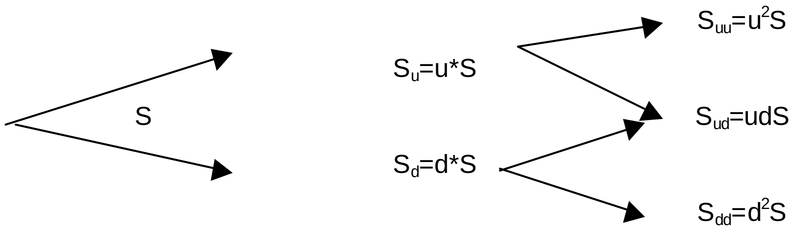
[1] En el caso de las opciones europeas sólo se hace esta decisión en T. En americanas t' puede ser cualquier t < T.

Por lo tanto estas son las probabilidades que se utilizan para el cálculo del valor esperado del valor presente de la opción.

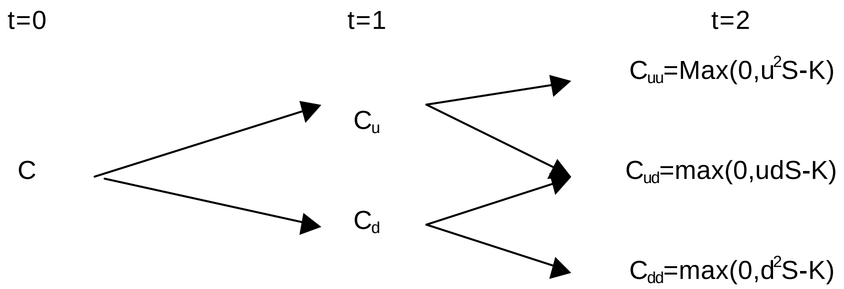
$$C = \frac{pC_U + (1-p)C_d}{r*}$$

Ampliando esto a dos períodos da:

Trayectoria del precio del activo subyacente:



Trayectoria del precio de la call:



En este caso la valoración de la call varía si es que se trata de una opción americana o una europea, ya que la opción americana puede ser ejercida antes del vencimiento.

<u>Caso opción europea</u>: Corresponde al caso más sencillo ya que sólo se debe pasar los flujos del período final. Por lo tanto se resuelve el problema desde atrás hacia delante.

Partiendo desde t=2. Sabemos por que

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{du}}{r*}$$

$$C_d = \frac{pC_{ud} + (1-p)C_{dd}}{r*}$$

Análogamente para el período t=1 queda:

$$C_u = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{r*}$$

Distribuyendo y utilizando las relaciones anteriores:

$$Cu = \frac{p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{r*}$$

<u>Caso opción americana</u>: En este caso hay que hacer un análisis sobre si conviene o no ejercer la opción **en cada período**, esto imposibilita el tener una ecuación que determine su valor y se debe hacer un análisis de período a período y después pasarlo a VP. (Se ve mejor eso con un ejemplo)

Para el caso de N períodos el análisis es idéntico al anterior.

Problema 1

La acción de la empresa A se está transando a $10. Se sabe que el precio aumentará o caerá en un 20% para cada uno de los próximos dos años. La tasa de interés anual es de un 10% (simple).

a) ¿Cuál es el precio de una call europea a dos años sobre la acción de A que tiene un precio de ejercicio de $8?

Los parámetros del modelo son:

u = 1,2 (Si sube lo haría en un 20%)
d = 0,8 (Si baja lo haría en un 20%)
r* = 1,1

Entonces p=(1,1-0,8)/(1,2-0,8)=0,3/0,4=0,75 ➔ 1-p=0,25

Calculamos el árbol de precios:

t=0	t=1	t=2
		12*1,2=14,4
	10*1,2=12	
10		12*0,8=8*1,2=9,6
	10*0,8=9	
		8*0,8=6,4

Árbol de la call

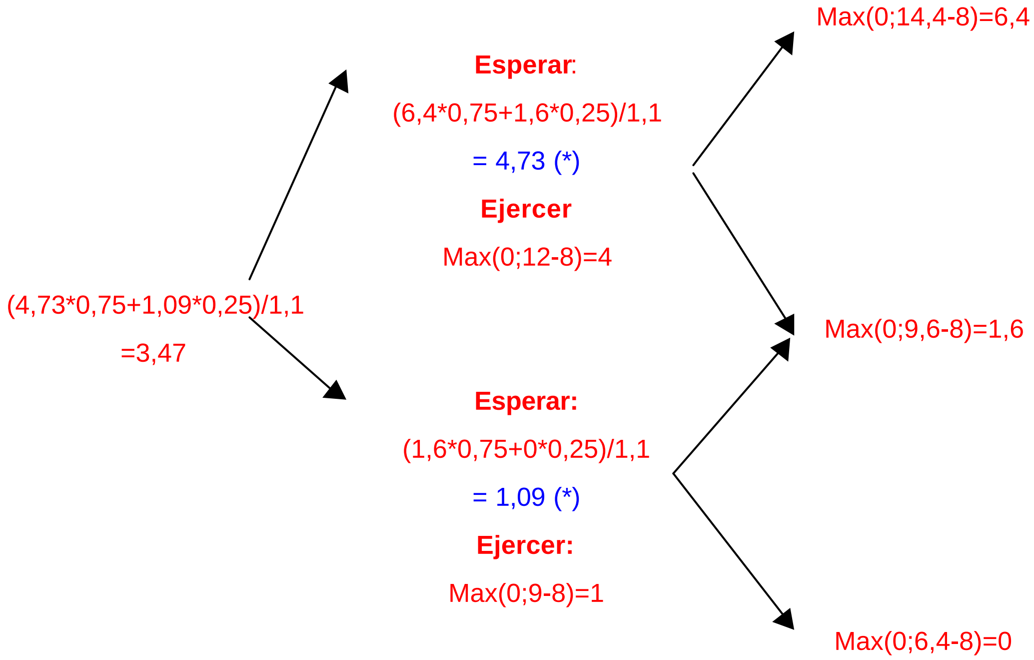
		Max(0;14,4-8)=6,4
	(6,4*0,75+1,6*0,25)/1,1 = 4,73	
(4,73*0,75+1,09*0,25)/1,1 =3,47		Max(0;9,6-8)=1,6
	(1,6*0,75+0*0,25)/1,1 = 1,09	
		Max(0;6,4-8)=0

Como se puede ver se resuelve desde el último período hacia el primero. Se calcula el valor presente hasta llegar al día de hoy (o el del análisis)

b) Repita el cálculo anterior, pero asumiendo que la opción es americana. ¿Existen diferencias?, explique.

El árbol de precios es igual al del caso de la pregunta a) , porque el activo subyacente sigue siendo el mismo. El arbol de la call cambia ya que en cada período (excepto en el final) hay que decidir si se ejerce la opción en ese período o se espera, esto quiere decir que hay que comparar si conviene el flujo en ese período o elñ valor presente esperado de los flujos futuros.

Árbol de la call



En este caso siempre conviene esperar y sólo ejercer en el último período, por lo que el resultado da igual al de la opción europea. En todo caso hay que hacer el análisis en cada período ya que puede pasar (como se ve en otros problemas) que convenga ejercer. En este caso el que pasa al próximo período en el cálculo del VPN es el flujo de "ejercer" y no el de "esperar".

Problema 2

El precio actual de la acción de la empresa "FCO" es $40. Se sabe que el próximo período el precio de la acción puede aumentar en un 10.6% o caer en un 9.6%. La tasa de interés libre de riesgo es de un 8% anual.

a) Derive un modelo binomial de tres períodos para el precio de "FCO" (esto es, use un mes para cada rama del árbol). Encuentre u, d, r y p.

S(t)=40

u=1+10,6%=1,106

d=1-9,6%=0,904

r*=1+r=(1+0,08)^(1/12)=1,0064 (r tiene relación con el período de cada rama del árbol binomial. En este caso son de 1 mes = 1/12 años)

p=(1,0064-0,904)/(1,106-0,904)=0,507 , una forma de ver si uno se equivocò en algo es comprobar que p sea menor que 1 y mayor que cero. Si da un valor fuera de ese rango hay algo mal en r, en u y/o en d.

t=0	t=1	t=2	t=3
			48,93*1,106=54,12
		44,23*1,106=48,93	
	40*1,106=44,24		44,24
40		44,24*0,904 =36,16*1,106 =40	
	40*0,904=36,16		36,16
		36,16*0,904=32,69	
			29,55

OJO: Como se puede observar en este ejemplo y en los anteriores existe una repetición de ciertos valores. Por ejemplo el periodo "ud" es 44,24 y el período "uud" también es 44,24; asì como lo que pasa en otros periodos. Esto se conoce como árbol recombinante. NO TODOS LOS ARBOLES SON ASÍ. Para que un árbol se recombine se tiene que dar la condición de que u*d = 1

Además no siempre u y d son constantes, lo que provoca que el nodo "udu" puede ser distinto al nodo "duu".

b) Encuentre el precio al cual se transa hoy día una put europea sobre la acción de "FCO", con vencimiento a tres meses y precio de ejercicio de $45.

La función de pagos de una put es p(t)=max(0,k-S(t)). En este caso la opción es europea, por lo tanto sólo se puede ejercer en la fecha del contrato, T. Por lo tanto, el problema se reduce a calcular el valor presente del valor esperado del contrato.

t=0	t=1	t=2	t=3
			Max(45-54,12;0)=0
		(0*p+0,76(1-p))/r*=0,37	
	(0,37p+4,71(1-p))/r*=2,5		Max(45-44,24;0)=0,76
(2,5p+8,26(1-p))/r*=5,31		(0,76p+(1-p)15,45)/r*=4,71	
	(4,71p+(1-p)15,45)/r*=8,26		Max(45-36,16;0)=8,84
		(8,84p+(1-p)15,45)/r*=12,02	
			Max(45-29,55;0)=15,45

La put vale 5,31

c) Ahora Ud. Se da cuenta de que realmente la opción era americana. Encuentre el precio de la put americana y explique.

En este caso la opción al ser americana puede ser ejercida en cualquier momento. Por lo tanto hay que comparar en cada nodo si conviene o no.

t=0	t=1	t=2	t=3
			Max(45-54,12;0)=0
		Esperar: **(0p+0,76(1-p))/r*** **=0,37 (*)** Ejercer: Max(0;45-48,93)=0	
	Esperar: **(0,37p+5(1-p))/r*** **=2,63 (*)** Ejercer: max(45-44,24)=0,76		Max(45-44,24;0)=0,76
(2,63p+8,84(1-p))/r* =5,66		Esperar: (0,76p+8,84(1-p))/r* =4,71 **Ejercer:** **Max(0;45-40)=5 (*)**	
	Esperar: (5p+12,31(1-p))/r* = 8,54 **Ejercer:** **max(45-36,16)=8,84 (*)**		Max(45-36,16;0)=8,84
		Esperar: (8,84p+15,45(1-p))/r* =12,02 **Ejercer:** **Max(0;45-32,69)** **=12,31 (*)**	
			Max(45-29,55;0)=15,45

La put vale 5,66 .
Su valor es mayor a la parte anterior porque siempre una opción americana vale tanto o más que una europea.

d) Suponga que se anuncia la repartición de un dividendo de $10 por acción en un mes más. Valorice nuevamente la put americana de la parte c). ¿Es el precio encontrado mayor o menor al de la parte c)? Explique.

En presencia de dividendos el análisis sufre los siguientes cambios:

+ Se requiere identificar el momento óptimo de ejercicio en el caso de desear hacerlo

+ Generalmente el arbol no se recombina.

En este caso al tratarse de una put el momento óptimo de ejercicio es post-dividendo. Entonces la trayectoria de precios es:

t=0	t=1 PRE-DIV	t=1 POST-DIV	t=2	t=3
				37,87*1,106=41,88
			34,24*1,106=37,87	
	40*1,106=44,24	44,24-10=34,24		30,95*1,106=34,23
			34,24*0,906=30,95	
				30,95*0,906=27,98
40				
				28,93*1,106=32
			26,16*1,106=28,93	
	40*0,906=36,16	36,16-10=26,16		28,93*0,906=26,16
			26,16*0,906=23,65	
				23,65*0,906=21,38

La trayectoria de la put es:

t=0	t=1 POST-DIV	t=2	t=3
			Max(45-41,88;0)=3,12
		Esperar: (3,12p+10,77(1-p))/r* =6,85 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-37,87;0)=7,13 (*)**	
	Esperar: (7,13p+14,05(1-p))/r* = 10,48 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-34,24;0)=10,76 (*)**		Max(45-34,23;0)=10,77
		Esperar: (10,77p+17,02(1-P))/r* =13,76 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-30,95;0)=14,05 (*)**	
			Max(45-27,98;0)=17,02
(10,76p+18,84(1-p))/r*= 14,65			
			Max(45-32;0)=13
		Esperar: (13p+18,85(1-p))/r* =15,78 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-28,93;0)** **=16,07 (*)**	
	Esperar: (16,07p+ 21,35(1-p))/r* =18,55 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-26,16;0)=18,84 (*)**		Max(45-26,15;0)=18,85
		Esperar: (18,85p+23,62(1-p))/r* =21,07 - - - - - - - - **Ejercer:** **max(45-23,65;0)=21,35 (*)**	
			Max(45-21,38;0)=23,62

Se hace sólo análisis en POST DIV porque es una put (es cosa de analizar como son los flujos en PRE DIV y no es complicado ver que los flujos de ejercer son mayores en POST DIV si la opción americana es una PUT)

El precio de la put es 14,65 y es mayor porque el valor del activo subyacente S(t)-VP(DIV) cae con respecto al precio de ejercicio, K.

Problema 3

Considere un portafolio compuesto por dos opciones escritas en la misma acción:

- Posición larga (compradora) en una call europea
- Posición corta (vendedora) en una put europea

ambas con la misma fecha de expiración, T, y el mismo precio de ejercicio, K.

(a) ¿Cuál es el pago de este portafolio en T, como función del precio de la acción en T?

V(T)=c(T)-p(T)=max(S(T)-K,0)-max(K-S(T),0)

	S(T)>K	S(T)<K
V(T)S	S(T)-K	-K-S(T)

(b) ¿Qué otro derivado tiene la misma función de pago?

Una posición larga (compra) de un forward con contrato K. (siempre se ejerce en T y da como flujo la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio) .

Estimaciones de u y d utilizando estadísticas

Hasta el momento se han utilizado valores de u y d que son datos, pero es posible calcularlos utilizando la siguiente relación:

$$u = \exp(s\sqrt{t})$$

$$d = u^{-1}$$

donde σ es la volatilidad de los retornos de la acción (o el activo), τ es la relación entre las unidades de tiempo de la volatilidad y la de las ramas de los árboles.

Problema 4

El precio de la acción de "JAV" es $40. No se pagarán dividendos en los próximos tres meses. La tasa esperada de retorno compuesta continuamente de la acción de "JAV" es 16 por ciento anual y su volatilidad anual es de 35 por ciento. La tasa de interés compuesta anualmente es de un 8 por ciento. Construya un árbol binomial del precio de la acción, donde cada período es de 1 mes. (Por simplicidad utilice los valores aproximados de u y d, donde u=d-1=exp{s }).

(a) Valorice una put europea a tres meses con un precio de ejercicio de $45.

S(t)=40

u=exp(0,35*raiz(1/12)))=1,106 , la raiz de 1/12 es la conversión de unidades de tiempo. La volatilidad del enunciado está en base anual y las ramas del árbol que vamos a construir están en meses. En 1 mes hay 1/12 años.

$d=u^{-1}=0,904$

r*=(1+8%)^(1/12)=1,0064

p=(1,0064-0,904)/(1,106-0,904)=0,5069

El arbol de precios (identico al problema 2)

t=0	t=1	t=2	t=3
			48,93*1,106=54,12
		44,23*1,106=48,93	
	40*1,106=44,24		44,24
40		44,24*0,904 =36,16*1,106 =40	
	40*0,904=36,16		36,16
		36,16*0,904=32,69	
			29,55

t=0	t=1	t=2	t=3
			Max(45-54,12;0)=0
		(0*p+0,76(1-p))/r*=0,37	
	(0,37p+4,71(1-p))/r*=2,5		Max(45-44,24;0)=0,76
(2,5p+8,26(1-p))/r*=5,31		(0,76p+(1-p)15,45)/r*=4,71	
	(4,71p+(1-p)15,45)/r*=8,26		Max(45-36,16;0)=8,84
		(8,84p+(1-p)15,45)/r*=12,02	
			Max(45-29,55;0)=15,45

La put vale 5,31

(b) Suponga que la put está mal valorada y se vende en \$5.2. ¿Cuál es la ganancia por arbitraje que podría realizar? Explique cómo obtenerla.

En este caso hay que crear lo que se conoce como portafolio replicante, el cual tiene los mismos pagos que la opción:

$\Delta=(P_u-P_d)/(S_u-S_d)$=(2,63-8,84)/(44,24-36,16)=-0,767

$L=(dP_u-uP_d)/(r^*(u-d))$=(0,904*2,63-1,106*8,84)/(1,0064*(1,106-0,904))=36,35

Entonces hay que comprar 0,767 unidades de la acción y pedir prestado \$36,35 hoy

Con esto se puede generar unos flujos idénticos a la opción (propuesto: comprobar esto), la cual puede ser vendida a 5,31 generando una ganacia de 5,31-5,2=0,11

Problema 5

El valor corriente de la acción de "ERR" es $20. La volatilidad del retorno de la acción se mueve inversamente en relación al precio de la acción. Esto es, volatilidad/mes=2/S, donde S representa de precio de IBM. La tasa de interés simple es 1% por mes. Si "ERR" no paga dividendos, encuentre el precio de una call americana con un precio de ejercicio de $20 con fecha de expiración de dos meses. Utilice el modelo binomial de dos períodos. Hint: Dado que la volatilidad del precio de "ERR" no es constante, usted debe calcular u, d y p para cada nodo.

r*=1+1%=1,01

Como las volatilidades no son constantes entonces u, d y p no son constantes, por lo que deben ser calculados para cada nodo relevante:

Nodo	S	σ=2/S	u	d	p
Hoy	20	2/20=0,1	Exp(0,1)=1,105	1/1,105=0,905	(1,01-0,905)/(1,105-0,905)= 0,525
U	20*1,105 = 22,103	2/22,103=0,09	Exp(0,09)=1,095	1/1,095=0,913	(1,01-0,913)/(1,095-0,913)=0,533
D	20*0,905 = 18,10	2/18,10=0,111	Exp(0,111)=1,117	1/1,117=0,895	(1,01-0,895)/(1,095-0,895)=0,518

Entonces la trayectoria de precios queda

t=0	t=1	t=2
		22,103*1,095=24,197
	22,103	
		22,103*0,913=20,191
20		18,100*1,117=20,211
	18,100	
		18,100*0,895=16,203

El árbol de pagos es:

t=0	t=1	t=2
		Max(24,197-20;0)=4,197
	(4,197*0,533+0,191*(1-0,533))/r* =2,2981	
		Max(20,191-20;0)=0,191
(2,2981*0,525+0,1127*(1-0,525))/r* =1,2473		Max(20,211-20;0)=0,211
	(0,211*0,518)/r*=0,1127	
		Max(16,203-20;0)=0

Fórmula de Black and Scholes

La exactitud del modelo de valoración de opciones mediante árboles binomiales depende de densidad, mientras más nodos exista entre el inicio y la fecha de maduración, más exacto es el resultado. La fórmula de Black and Scholes se encarga de esto, para estimar el valor de una opción europea.

La derivación de la fórmula de Black and Scholes se basa en los siguientes supuestos:

1) Los mercados financieros no tienen fricciones, es decir, no hay impuestos, no hay costos de transacción, todos los activos son perfectamente divisibles y no hay restricciones a las ventas cortas.
2) Las tasas de interés de colocación y captación son iguales y constantes entre hoy y la fecha de vencimiento. Se asume que dicha tasa es compuesta continuamente.
3) El activo subyacente no paga dividendos entre hoy y la fecha de vencimiento.
4) El precio de la acción se distribuye lognormal.

Bajo estos supuestos el precio de una **call europea** está dada por:

$$c(S, K, t = 0, r, s, T) = S\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\exp(-rT)$$

Donde $\Phi()$ representa la función de distribución acumulada de una normal estándar, d_1 y d_2 se definen por:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K\exp(-rT)}\right)}{s\sqrt{T}} + \frac{s\sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - s\sqrt{T}$$

Donde,

S es el precio corriente del activo subyacente

K es el precio de ejercicio

T es la fecha de vencimiento de la opción

r es la tasa de interés

σ es la volatilidad del retorno del activo subyacente

Para ocupar la fórmula de Black and Scholes en opciones put europeas hay que usar la **paridad put-call:**

$$p(S, K, t, T) = c(S, K, t, T) - S(t) + K\exp(-rt)$$

El procedimiento es calcular la opción como si fuera una call y después transformarla a put con la relación anterior.

Problema 6

El precio de la acción de la clásica empresa “ABC” es $40. No se pagarán dividendos en los próximos tres meses. La tasa esperada de retorno compuesta continuamente de la acciòn de “ABC” es 16 por ciento anual y su volatilidad anual es de 35 por ciento. La tasa de interés compuesta anualmente es de un 8 por ciento. Construya el árbol binomial del precio de la acción, donde cada período es de 1 mes.

a) Si la opción put es europea con precio de ejercicio $45. Encuentre su precio mediante árboles binomiales de tres períodos.

Esto ya fue resuelto anteriormente, en los problemas 4 y 2. El resultado es P=5,31

b) Ahora utilice la fórmula de Black and Scholes.

S=40

K=45

R=exp(8%)=8,3%, se convierte a tasa continua

Kexp(-rT)=45exp(-8,3%*3/12)=44,0727

S/Kexp(-rT)=0,90759

Ln(S/Kexp(-rT))=-0,09696127

σRaiz(T)=35%*raiz(3/12)=17,5%

Ln(S/Kexp(-rT))/ σRaiz(T)=-0,55406

Ln(S/Kexp(-rT))/ σRaiz(T)+ σRaiz(T)/2= -0.466564393=d1

Φ(d1)= 0.320405796 (Viéndolo en una tabla normal estándar)

d2=-0.641564393

Φ(d2)= 0.260577964 (Viéndolo en una tabla normal estándar)

Entonces,

C= 40*0,32041+44,0727*0,260578 = 1,331855 . Pero se buscaba valorar una put y no una call, entonces usamos la relación put-call

P=1,331855-40+44,0727=5,404

c) Compare los resultados y comente.

Da un resultado mayor, pero es más exacto ya que tiene mayor densidad en el árbol.

Notas al final

- Esta guía no contiene toda la materia de opciones, sólo la más relevante.
- Las opciones en esta guía están suscritas sobre acciones, pero pueden existir opciones sobre cualquier activo, desde índices (como el IPSA, IGPA, SP500), futuros, forwards, bonos y hasta opciones sobre opciones. En el caso de que uno se encuentre ante una opción diferente lo importante es descubrir cual es el activo subyacente. Por ejemplo si la opción está escrita sobre otra opción habría que hacer 3 árboles. El primero sobre el activo subyacente de la primera opción, el segundo sobre la opción que es subyacente y la tercera con los pagos de la última opción.