APT

2007 Andrés Kettlun L.

Introducción al APT: Arbitrage Pricing Theory

- El APT fue formulado por Stephen Ross en 1976.
- El CAPM predice que el retorno de un activo estará linealmente relacionado con un único factor común: la tasa de retorno del portafolios de mercado.
- El APT está basado en un concepto similar, pero es mucho más general. Asume que la tasa de retorno en cualquier activo es una función lineal de *k* factores:

$$\tilde{r}_i = E(\tilde{r}_i) + b_{i1}\cdot\tilde{f}_1 + b_{i2}\cdot\tilde{f}_2 + \cdots + b_{ik}\cdot\tilde{f}_k + \tilde{e}_i$$

- Donde
  - $\tilde{r}_i =$ Tasa de retorno aleatoria del activo i
  - $E(\tilde{r}_i) =$ Tasa de retorno esperada del activo i
  - $b_{ik} =$ Sensibilidad del retorno del activo i al factor k
  - $\tilde{f}_k =$ Factor k de media cero, común a los retornos de todos los activos
  - $\tilde{e}_i =$ Término de ruido aleatorio de media cero para el activo i

IN56A — Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, Andrés Kettlun 2007

Introducción al APT: Arbitrage Pricing Theory

- El modelo del APT no especifica cuales son los factores que hay que considerar, hay que determinarlos empiricamente. Distintos autores han encontrado factores que pueden ser relevantes, como por ejemplo, los cambios no anticipados en:
  - Indice de producción industrial.
  - Crecimiento PGB
  - Premio por riesgo de bonos corporativos
  - Tasas de Inflación
  - Tasas de interés
  - Otros.
- En el CAPM se exige eficiencia de las carteras formadas por los activo
- En el APT se exige:
  - que no existan oportunidades de arbitraje
  - universo de activos suficientemente grande

IN56A — Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, Andrés Kettlun 2007

Desarrollo del APT

- Como se verá posteriormente, el CAPM es un caso particular del APT, cuando el retorno de la cartera de mercado es el único factor relevante.
- El desarrollo de la teoría requiere que en número de activos, n, sea mucho mayor que el número de factores, k, y que el término de ruido ε_i sea el riesgo no sistemático para el activo i. Debe ser independiente de todos los factores y de todos los términos de error de los otros activos.
- Esta última condición, significa que los f_k son ortogonales a los ε_i , y además $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$

IN56A — Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, Andrés Kettlun 2007

Desarrollo del APT

- La principal característica del APT es razonable y directa: si se construye un portafolio que (1) no requiere capital y (2) no tiene riesgo, entonces ese portafolio, denominado *portafolio de arbitraje*, no entrega retorno (en promedio).
- Como el portafolio de arbitraje no requiere capital, la forma usual de construirlo es vender algunos activos para invertir los recursos obtenidos en otros activos. Matemáticamente:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$$

Donde w_i = porcentaje del capital invertido en activo i

IN56A — Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, Andrés Kettlun 2007

Desarrollo del APT

- Si hay n activos en el portafolio de arbitraje, el retorno del portafolio será:

$$\tilde{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i E(\tilde{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} w_i b_{i1}\tilde{f}_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i b_{ik}\tilde{f}_k + \sum_{i=1}^{n} w_i\tilde{\varepsilon}_i$$

- Para obtener un portafolio sin riesgo, es necesario eliminar tanto el riesgo sistemático como el diversificable. Esto se puede hacer:
  - Seleccionando porcentajes de inversión w_i pequeños en cada activo
  - Diversificando en un gran número de activos
  - Eligiendo los pesos w_i tales que para cada factor k la suma ponderada de cada componente de riesgo sistemático (b_k) es cero.

IN56A — Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, Andrés Kettlun 2007

Desarrollo del APT

- Matemáticamente, estas condiciones corresponden a:

$$w_i \approx \frac{1}{n}$$
$$n >> 1$$
$$\sum_i w_i b_{ik} = 0$$

- Dado que los términos de error ε_i son independientes, al invertir en un gran número de activos, su promedio ponderado se aproxima a cero.
- Asimismo, dado que se ha elegido los wi tales que las componentes de riesgo sistemático para cada factor son cero ($\sum_i w_i b_{ik} = 0$), se elimina todo el riesgo sistemático.

Desarrollo del APT

- Luego:

$$\tilde{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i E(\tilde{r}_i) + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} w_i b_{i1}} \tilde{f}_1}_{0} + \cdots + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} w_i b_{ik}} \tilde{f}_k}_{0} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{\varepsilon}_i}}_{0}$$

- Hemos obtenido un portafolio de arbitraje, que no tiene riesgo sistemático ni diversificable, y que no requiere inversión de capital. Si entregara un retorno distinto de cero, se podría obtener una tasa de rentabilidad infinita sin capital y sin riesgo, lo que claramente es imposible en un mercado en equilibrio.
- Por lo tanto, su retorno debe ser constante e igual a cero.

Desarrollo del APT

- Luego: $$r_P = \sum_{i=1}^{n} w_i E(\tilde{r}_i) = 0$$
- Las condiciones antes expuestas en realidad constituyen un planteamiento de algebra lineal. Usando notación vectorial:
- Cualquier vector w que cumpla:

$$w^T \cdot \mathbf{1} = 0 \quad y \quad w^T \cdot \mathbf{b}_k = 0 \quad \forall k$$

- Implica que, necesariamente:

$$w^T \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0$$

Desarrollo del APT

- Como consecuencia, se puede demostrar algebraicamente que el vector de retornos esperados es una combinación lineal entre el vector unitario y los vectores de coeficientes.
- Luego, existen constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que:

$$E(\tilde{r}_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_k b_{ik}$$

- Aplicandolo a un activo sin riesgo:

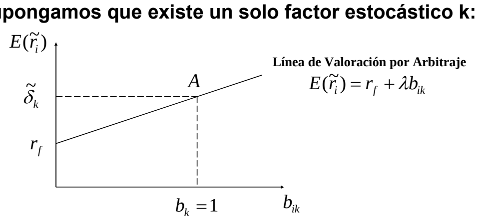
$$E(\tilde{r}_i) = r_f = \lambda_0$$

- Luego:

$$E(\tilde{r}_i) - r_f = \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_k b_{ik}$$

Desarrollo del APT

- Supongamos que existe un solo factor estocástico k:



- En equilibrio, todos los activos deben caer sobre la línea de valoración por arbitraje. Del gráfico:

$$E(\tilde{r}_i) = r_f + (\bar{\delta}_k - r_f) b_{ik}$$

Desarrollo del APT

- Donde:

$\tilde{\delta}_k =$ Retorno esperado de un portafolios con sensibilidad 1 al factor k y con sensibilidad 0 al resto de los factores

- De acuerdo a lo anterior, λ_k puede ser interpretado como el premio por riesgo para el factor k:

$$\lambda_k = \bar{\delta}_k - r_f$$

APT GENERICO

- **Por lo tanto, el APT puede ser reescrito como:**

$$E(\tilde{r}_i)-r_f=(\bar{\delta}_1-r_f)b_{i1}+\cdots+(\bar{\delta}_k-r_f)b_{ik}$$

- **Donde b_{ik} se definen como:**

$$\mathrm{b}_{\mathrm{ik}}=\frac{\mathrm{Cov}(\tilde{r}_i,\tilde{\delta}_k)}{V(\tilde{\delta}_k)}$$

- **Es decir, en la misma forma que el beta del CAPM.**

Ejemplo

- **Suponga que un trabajo empírico revela que los retornos de los activos se pueden explicar por dos factores f_1 y f_2. La siguiente tabla muestra los retornos estimados de tres activos, y los cambios en los dos factores. Además r_f = 10%. Determinar si existen oportunidades de arbitraje.**

Estado de la naturaleza	Probabilidad	Retorno del Activo (%) X	Y	Z	Cambio en Factor (%) δ_1	δ_2
Muy malo	20%	-55,23	623,99	53,00	-10,00	-5,00
Malo	20%	70,70	10,00	413,37	-5,00	38,48
Promedio	20%	-9,00	25,00	-1493,12	25,00	8,00
Bueno	20%	-12,47	-3771,42	1058,75	40,00	-1,44
Excelente	20%	61,00	3243,44	83,00	50,00	0,00

Ejemplo

- **Los cambios de los factores se han transformado linealmente para cumplir la condición de ortogonalidad:**

$$[-10\,-5\quad 25\quad 40\quad 50]\begin{bmatrix}-5\\38{,}48\\8\\-1{,}44\\0\end{bmatrix}=0$$

- **Si solo hay dos factores que gobiernan los retornos de los activos, entonces:**

$$E(\tilde{r}_i)=r_f+\left[\bar{\delta}_1-r_f\right]b_{i1}+\left[\bar{\delta}_2-r_f\right]b_{i2}$$

Ejemplo

- **Calculemos b_{x1}:**

p_iX_i		$p_i\delta_{1i}$		$p_i(\delta_{1i}-E(\delta_1))^2$		$p_i(Xi-E(Xi))(\delta_{1i}-E(\delta_1))$	
0,20 (-55,23) =	-11,046	0,20 (-10) =	-2,00	0,20 $(-10-20)^2$ =	180	0,20 (-66,23)(-30) =	397,38
0,20 (70,70) =	14,140	0,20 (-5) =	-1,00	0,20 $(-5-20)^2$ =	125	0,20 (59,70) (-25)=	-298,50
0,20 (-9,00) =	-1,800	0,20 (25) =	5,00	0,20 $(25-20)^2$ =	5	0,20 (-20,00) (5) =	-20,00
0,20 (-12,47) =	-2,494	0,20 (40) =	8,00	0,20 $(40-20)^2$ =	80	0,20 (-23,47) (20) =	-93,98
0,20 (-61,00) =	12,200	0,20 (50) =	10,00	0,20 $(50-20)^2$ =	180	0,20 (50,00) (30) =	300,00
$E(r_x)$ =	11,000	$E(\delta_1)$ =	20,00	$VAR(\delta_1)$ =	570	$COV(X,\delta_1)$ =	285,00

- **Luego:**

$$b_{X1}=\frac{COV(X,\delta_1)}{VAR(\delta_1)}=\frac{285{,}0}{570{,}0}=0{,}5$$

Ejemplo

- **Repitiendo el cálculo para los otros factores, llegamos a los siguientes resultados:**

Activo	E (r_i)	b_{i1}	b_{i2}
X	11%	0,5	2,0
Y	25%	1,0	1,5
Z	23%	1,5	1,0
	$E(\delta_1)$ = 20%		
	$E(\delta_2)$ = 8%		

- **Luego, en equilibrio, aplicando el modelo del APT:**

$$E(r_x)=0{,}10+[0{,}20-0{,}10]0{,}5+[0{,}08-0{,}10]2{,}0=11\%$$
$$E(r_x)=0{,}10+[0{,}20-0{,}10]1{,}0+[0{,}08-0{,}10]1{,}5=17\%$$
$$E(r_x)=0{,}10+[0{,}20-0{,}10]1{,}5+[0{,}08-0{,}10]1{,}0=23\%$$

Ejemplo

- **Existe una oportunidad de arbitraje en el activo Y, por cuanto su rentabilidad proyectada (25%) es superior a su rentabilidad de equilibrio calculada con el APT (17%).**
- **Para aprovechar esta oportunidad de arbitraje, vendo los activos X y Z, y compro activo Y.**

Implementación del APT

- **La implementación del APT requiere tres etapas:**
  - Identificación de los factores
  - Estimación de los b_{ik}
  - Estimación del premio por riesgo de cada factor