



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y  
MATEMÁTICAS  
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso : IN56A-01  
Semestre : Primavera 2007  
Profesores : José Miguel Cruz  
Andrés Ketlun  
Auxiliares : Lorenzo Reus  
Jaime Sáez

Lunes 6 de Agosto  
Auxiliar N°2: Composición y Estructura de Tasas

Repaso de Tasas:

Importante Recordar:

-Composición de tasas:

Tipo de composición

1. Lineal
2. Compuesto

Frecuencia de Composición

1. Anual
2. Semestral
3. Continua

Las tasas pueden ser de tipo nominal o real, es decir, pueden medir las variaciones en términos monetarios (Nominales) o de poder adquisitivo (reales).

$$(1+\mathbf{R} \text{ nominal}) = (1+\mathbf{R} \text{ real}) * (1+\text{Inflación})$$

Simplificación común

$$(1+\mathbf{R} \text{ nominal}) = 1+\mathbf{R} \text{ real}+\text{Inflación}+ \mathbf{R} \text{ real}*\text{Inflación},$$

Pero

$$\mathbf{R} \text{ real}*\text{Inflación} \approx 0$$

Por lo tanto

$$\mathbf{R} \text{ nominal} = \mathbf{R} \text{ real}+\text{Inflación}$$

OJO: Si ocupan esta simplificación deben dejarlo explicito.

Para ponerse de acuerdo y tener una medida común, se creo el concepto de **riqueza final W**, donde

$$W = \left( 1 + \frac{R - \text{anual}}{f} \right)^{t * f}$$

T= cantidad de años

F= frecuencia de composición durante un año

## Pregunta 1

Para ahorrar dinero para las vacaciones (supongan en un año mas), ustedes tienen distintas posibilidades de que les ofrecen 4 bancos. Evalúe la riqueza final de cada opción y decida cual banco le ofrece una mayor rentabilidad. **Tome en cuenta que el banco central espera un inflación anual de 4%**

1. **Banco Español:** tasa anual nominal de 10% de composición compuesta anual.
2. **Banco Chileno:** tasa anual nominal de 9,5% de composición compuesta semestral.
3. **Banco Universitario:** tasa anual real de 6% de composición compuesta trimestral.
4. **Banco Simple:** tasa semestral nominal de 8% de composición simple semestral.

## Respuesta

**Banco Español:**

$$W 1 = \left( 1 + \frac{10 \%}{1} \right)^{1*1} = 1.1 = 10 \%$$

**Banco Chileno:**

$$W 2 = \left( 1 + \frac{9.5 \%}{2} \right)^{1*2} = 1.097 = 9.7 \%$$

**Banco Universitario**

$$W 3 = \left( 1 + \frac{6 \%}{4} \right)^{1*4} = 1.061 = 6.1 \% \text{ _ real}$$

(1+R nominal) = (1+R real) \* (1+Inflación)

$$(1 + 6.1 \%) * (1 + 4 \%) = 1.104 = 10.4 \%$$

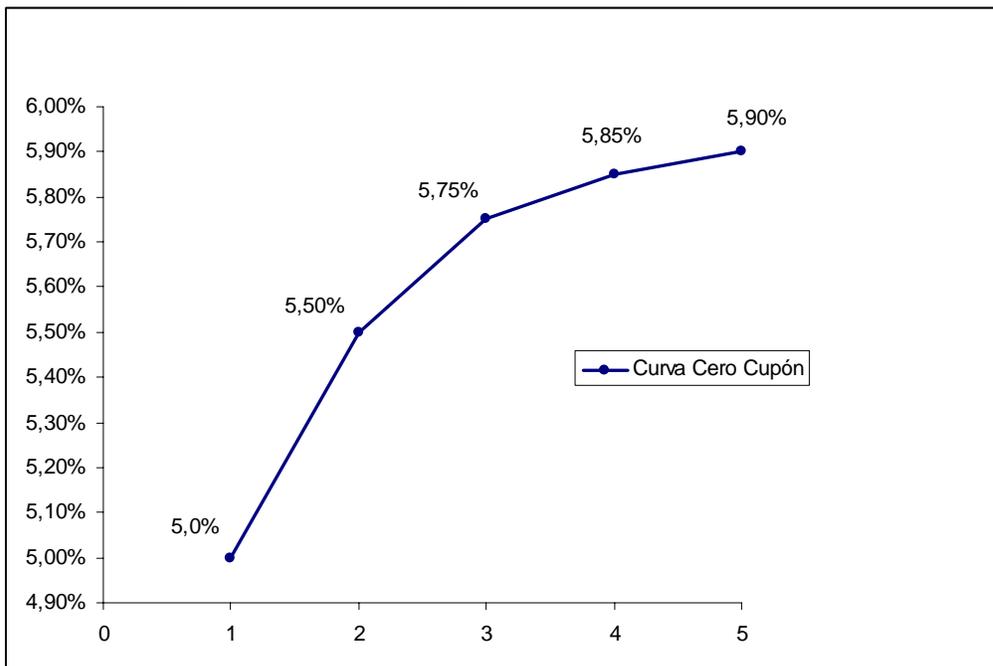
**Banco Simple:**

$$W 4 = (1 + 8 \% * 2) = 1.16 = 16 \%$$

Evaluando las cuatro alternativas, es claro que el Banco Simple es el que me entrega una riqueza final Mayor, por lo tanto en la alternativa más rentable.

## Pregunta 2

Observe la siguiente curva Cero Cupón:



Calcule las tasas Forward de los periodos 1-2, 2-3, 3-4 y 5-6

## Respuesta

$$f_{1-2} = (1 + 5\%) \cdot (1 + f_{1-2}) = (1 + 5.5\%)^2$$

$$f_{1-2} = 6\%$$

$$f_{2-3} = (1 + 5.5\%)^2 \cdot (1 + f_{2-3}) = (1 + 5.75\%)^3$$

$$f_{2-3} = 6.3\%$$

$$f_{3-4} = (1 + 5.75\%)^3 \cdot (1 + f_{3-4}) = (1 + 5.85\%)^4$$

$$f_{3-4} = 6.2\%$$

$$f_{4-5} = (1 + 5.85\%)^4 \cdot (1 + f_{4-5}) = (1 + 5.90\%)^5$$

$$f_{4-5} = 6.1\%$$

### Pregunta 3

Suponga que su empresa recibirá 100 millones de dólares en  $t=4$ , pero debe realizar un pago de 107 millones en  $t=5$ . Asuma el tipo de cambio al contado,  $r_1=6\%$  y las siguientes tasas forward:  $f_{1-2}=6,4\%$ ,  $f_{2-3}=7,1\%$ ,  $f_{3-4}=7,3\%$ ,  $f_{4-5}=8,2\%$  (suponga composición anual de intereses).

Suponga que la empresa no puede acceder a las tasas forward. Muestre cómo puede la empresa bloquear la tasa de interés a la que puede invertir en  $t=4$ . ¿Serán los 100 millones de dólares invertidos a esta tasa encerrada suficientes para cubrir el pasivo de 107 millones de dólares?

### Respuesta

Lo primero que se debe hacer es calcular las tasas spot de los distintos períodos:

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1) \cdot (1+f_{1-2}) = (1,06) \cdot (1,064) = 1,12784 \Rightarrow r_2 = \sqrt{1,12784} - 1 = 6,2\%$$

$$(1+r_3)^3 = (1+r_2)^2 \cdot (1+f_{2-3}) = (1,062)^2 \cdot (1,071) = 1,207917 \Rightarrow r_3 = 6,5\%$$

$$(1+r_4)^4 = (1+r_3)^3 \cdot (1+f_{3-4}) = (1,065)^3 \cdot (1,073) = 1,296095 \Rightarrow r_4 = 6,7\%$$

$$(1+r_5)^5 = (1+r_4)^4 \cdot (1+f_{4-5}) = (1,067)^4 \cdot (1,082) = 1,402374 \Rightarrow r_5 = 7,0\%$$

Dado que mi empresa no puede tomar depósitos a la tasa forward, la empresa debe replicar de alguna manera un depósito a plazo por un año, tomado en 4 años más. Esto equivale a tener un egreso de \$100 millones el año 4 y un ingreso de \$108,2 millones el año 5 (\$100 millones  $\times$  (1+tasa forward año 4 al 5)).

Para ello, lo que debe hacer es construir este depósito a plazo de manera sintética, esto es, utilizando los instrumentos financieros disponibles (depósitos y préstamos). Por el Principio de No Arbitraje, si mi empresa es capaz de replicar los flujos pedidos por el problema, ambas inversiones tendrán el mismo valor.

Una estrategia que se puede seguir para replicar los flujos en este caso es:

1. Pedir prestado el valor presente de \$100 millones. Este dinero será recibido en 4 años. El préstamo tendrá una tasa igual a  $r_4 = 6,7\%$ .

$$\text{Préstamo} = 100 / (1,067)^4 = \$77,151 \text{ millones}$$

2. Invertir el monto total del préstamo a 5 años a la tasa spot de 5 años ( $r_5$ )

$$\text{Invertir} = 77,151 * (1,07)^5 = \$108,2 \text{ millones}$$

El efecto neto de estas transacciones es:

Año	0	1	2	3	4	5
Préstamo	+\$77,151	-	-	-	-\$100	-
Depósito	-\$77,151	-	-	-	-	+\$108,2
<b>Neto</b>	<b>0</b>	-	-	-	<b>-\$100</b>	<b>+\$108,2</b>

Año 0: Flujo de Caja neto = 0 (Préstamo = inversión)

Año 4: Flujo de Caja neto = -\$100 millones (pago del préstamo)

Año 5: Flujo de Caja neto = +\$108.2 millones (monto recibido de la inversión)

Obviamente, los \$108.2 millones serán suficientes para cubrir la deuda de \$107 millones.

#### Pregunta 4

Se necesita comprar una camioneta cuyo valor, al contado es de \$7.000.000. La automotora ofrece la posibilidad de financiar esta compra con un plan de 60 cuotas iguales (5 años) de \$130.000 c/u, con un pie de \$1.500.000. Adicionalmente se tiene la posibilidad de pedir un préstamo a tres años a una financiera, para financiar toda o parte de la compra, con un interés anual de un 15%, pagadero en cuotas mensuales iguales.

- Si mi capacidad de pago mensual máxima es de \$200.000, ¿puedo pedir un préstamo a la financiera y pagar la camioneta al contado?
- Si en la financiera me dan 3 meses de gracia ¿En cuánto varía la cuota necesaria para comprar al contado?.
- Si se dispone del dinero para pagar el pie ¿cuál alternativa conviene?. ¿Cuál es el interés cobrado por la automotora?
- Si NO se dispone del dinero para pagar el pie ¿Existe alguna forma de comprar la camioneta?

#### Respuesta

- Supongamos que pido el préstamo por el valor al contado del auto, es decir, por 7,000,000, y luego pago por tres años, mensualmente, el máximo que puedo pagar, es decir, 200,000. Es decir, mi estructura de pagos es la siguiente:



Luego, se debe verificar el valor presente de los pagos de 200.000 por 36 meses sin el valor del préstamo, y compararlo con este valor de 7,000,000.

Esto es:

$$VPN = -\frac{0.2}{(1+r)} - \frac{0.2}{(1+r)^2} - \dots - \frac{0.2}{(1+r)^{36}}$$

donde la tasa anual es 15%, por lo tanto la tasa mensual es  $0.15/12=1.25\%$ . Nuevamente, para derivar rápidamente la fórmula de cálculo del VPN:

$$(1) S = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \quad / \cdot a$$

$$(2) a \cdot S = a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow S(1 - a) = a - a^{n+1}$$

$$\text{luego (3) } S = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$$

Como en este caso, se tiene que  $a = 1/1+r$ , entonces, reemplazando en la ecuación (3):

$$S = \frac{1}{1+r} \cdot \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}} \right] = \frac{1}{r} \left( 1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \right)$$

Si se tiene la cuota C, entonces se multiplica por el valor obtenido usando la fórmula anterior, es decir:

$$S = \frac{C}{r} \left( 1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \right)$$

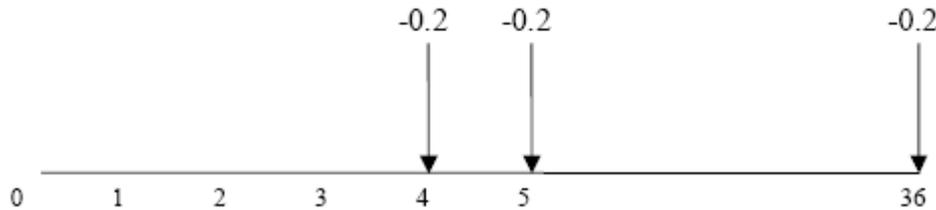
En este caso,  $n=36$ ,  $r=0.0125$  y  $C=200.000$ , por lo tanto  $S=5,769,453$ . Este valor es inferior a los 7,000,000 del préstamo, y por lo tanto no se alcanza a cubrir el valor del préstamo. Otra forma de ver esto es calcular el valor que debe tener la cuota mensual C de manera de pagar un préstamo de 7,000,000 al 15% de interés anual.

O sea, hacemos:

$$7,000,000 = \frac{C}{r} \left( 1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \right)$$

de donde se despeja que  $C=242,657$ , que es superior al monto máximo que puedo pagar mensualmente. Por ende no puedo pedir un préstamo y pagar la camioneta al contado.

b) Con tres meses de gracia, ¿cuánto aumenta la cuota? Primero, veamos la estructura de flujos:



Noten que calcular el flujo teniendo un período de tres meses de gracia (desde el período  $k=4$ ) es lo mismo que tener dos flujos, uno desde ahora al período tres ( $k-1$ ) y otro desde ahora hasta el período 36 ( $n$ ), y restar el primero al segundo.

Esto es:

$$S_{1 \rightarrow n} = \frac{C}{r} \left( 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right)$$

$$S_{1 \rightarrow k-1} = \frac{C}{r} \left( 1 - \frac{1}{(1+r)^{k-1}} \right)$$

$$\therefore S_{k \rightarrow n} = S_{1 \rightarrow n} - S_{1 \rightarrow k-1} = \frac{C}{r} \left[ \left( \frac{1}{1+r} \right)^{k-1} - \left( \frac{1}{1+r} \right)^n \right]$$

donde  $k$  es el período desde donde se empieza a pagar (o equivalentemente,  $k-1$  son los períodos de gracia).

Reemplazando que  $S=7,000,000$ ,  $r=0.0125$ ,  $k=4$  y  $n=36$ , y despejando  $C$ , se tiene que  $C=270,054$ , o un aumento de 27,396 pesos con respecto al caso anterior.

c) Si se dispone del dinero para pagar el pie, entonces

$$S = 1,500,000 + \frac{130,000}{1+r} + \frac{130,000}{(1+r)^2} + \dots + \frac{130,000}{(1+r)^{60}} = 7,000,000$$
$$\Rightarrow 5,500,000 = 130,000 \cdot \sum_{i=1}^{60} \frac{1}{(1+r)^i} = 130,000 \cdot \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^{60}} \right]$$

Se debe iterar para encontrar el r, pero parto con 1,25% que es el valor de la otra alternativa. El valor siguiente de r lo obtengo dándome cuenta que si subo r, baja el valor de la suma del VP y vice-versa. De esta manera, se llega a que r=1.224%, que es menor al valor anterior de 1.25%. Por ende, si se tiene el dinero, conviene el plan de la automotora.

d) Una opción es pedir un préstamo a la financiera a un 15% anual por el valor del pie del crédito de la automotora, y además tomar el crédito de la automotora. En este caso:

$$1,500,000 = \frac{C_1}{(1.0125)} + \frac{C_1}{(1.0125)^2} + \dots + \frac{C_1}{(1.0125)^{36}}$$

para calcular el valor de la cuota a cancelar a la financiera por el préstamo del pie, de donde  $C_1=59,998$ . Como el valor de la cuota de la automotora es de  $C_2=130,000$ , se tiene que el valor total de la cuota  $C=C_1+C_2=189,998$  es menor que el monto máximo que de 200,000 que puedo pagar mensualmente.