



Clase Auxiliar #1: Teoría de Juegos

Problema 1

Encuentre los equilibrios de Nash del siguiente juego de dos jugadores. El jugador 1 tiene tres acciones posibles: A, B y C; mientras que el jugador 2 tiene dos acciones posibles: A, B. Los pagos respectivos se presentan en la tabla siguiente:

u_1, u_2	A	B
A	5,4	5,4
B	8,3	1,9
C	3,6	7,2

Problema 2

Pruebe que una estrategia dominante no puede ser mixta no degenerada.¹

Problema 3

(Control 1 2003) Considere el juego del n-últimátum, figura 1. En este juego, el primer jugador ofrece dividir US\$100 con el jugador 2. Si 2 acepta, el juego acaba y los jugadores reciben los pagos respectivos (el primer pago es del oferente, el segundo pago es para el que decide aceptar, los demás reciben cero). Si 2 no acepta, debe hacer una oferta de división de US\$100 δ , con $\delta < 1$ al jugador 3. Si 3 no acepta, le hace una oferta a 4, y así sucesivamente.

- Considere $n=3$. Encuentre un equilibrio de Nash en que el primer jugador recibe US\$50.
- (Esta parte es independiente de la anterior). Considere solo equilibrios perfectos en el subjuego. Encuentre la expresión que describe cuánto recibe cada jugador para un n cualquiera.

¹ Es decir una estrategia mixta que asigna probabilidad positiva a más de una acción.

- c) Considere el caso en que $\lim \rightarrow \infty$. Encuentre la condición para que el primer jugador reciba US\$80 en un equilibrio perfecto en el subjuego.

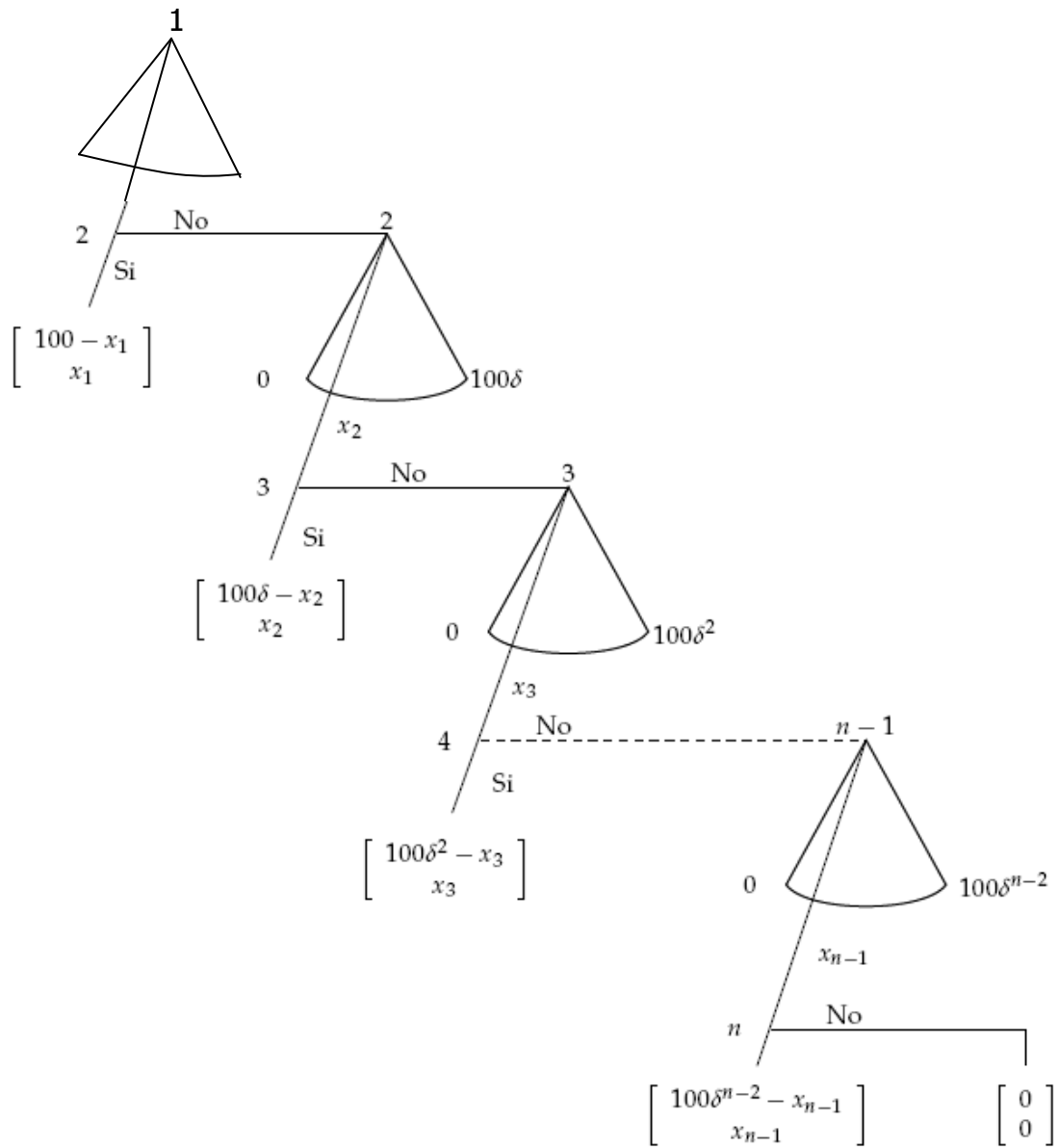


Figura 1: El juego del n-ultimátum

Solución.

Problema 1.

No hay equilibrios en estrategias puras. Busquemos equilibrios en estrategias mixtas.

Supongamos que la estrategia de 2 es mixta de la forma $\sigma_2 = (p, 1-p)$. Es decir, el jugador 2 juega A con probabilidad p y B con probabilidad $1-p$. Veamos cuales serán los pagos de 1 dada la estrategia de 2. (E denota esperanza)

$$E(u_1(a)) = 5$$

$$E(u_1(b)) = 1 + 7p$$

$$E(u_1(c)) = 7 - 4p$$

Luego,

1. para $p \in (0, 1/2)$ la mejor respuesta de 1 a $\sigma_2 = (p, 1-p)$ es C.
2. para $p=1/2$, 1 está indiferente entre A y C.
3. para $p \in (1/2, 4/7)$ la mejor respuesta de 1 a $\sigma_2 = (p, 1-p)$ es A.
4. para $p \in (4/7, 1)$ respuesta de 1 a $\sigma_2 = (p, 1-p)$ es B.
5. para $p=4/7$ 1 está indiferente entre A y B.

Analizamos cada caso por separado

1. si $p \in (0, 1/2)$ 1 juega c, pero si 1 juega c 2 juega a, y no $\sigma_2 = (p, 1-p)$. Luego no hay un eq de Nash con $\sigma_2 = (p, 1-p)$ y $p \in (0, 1/2)$.
2. Si $p=1/2$, la mejor respuesta de 1 será de la forma $\sigma_1 = (q, 0, 1-q)$, con $q \in [0, 1]$.
Para que 2 esté dispuesto a jugar $\sigma_2 = (p, 1-p)$ debe ocurrir que los pagos de jugar A sean iguales a los pagos de jugar B.

$$E(u_2(A)) = 6 - 2q$$

$$E(u_2(B)) = 2 + 2q$$

Los dos últimos valores se igualan sólo para $q=1$, luego $(\sigma_1, \sigma_2) = ((1, 0, 0), (1/2, 1/2))$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego.

3. Si $p \in (1/2, 4/7)$, 1 juega A, 2 obtiene 4 tanto si juega A como si juega B, luego, está dispuesto a randomizar, $(\sigma_1, \sigma_2) = ((1, 0, 0), (p, 1-p))$ con $p \in (1/2, 4/7)$ es equilibrio de Nash del juego.

Los dos casos que quedan se resuelven de forma análoga y quedan propuestos.

Problema 2.

Recordemos que una estrategia σ es dominante para el jugador i si se cumple que para todo σ' se cumple que

$$u_i(\sigma, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma', \sigma_{-i})$$

con desigualdad estricta para algún σ_{-i} .

Sean s y $\tilde{s}$ dos acciones del jugador i tales que con σ , i las juega con probabilidad positiva (estas existen si σ es no degenerado).

Si existiera una estrategia de los demás jugadores, σ_{-i} , tal que $u_i(s, \sigma_{-i}) > u_i(\tilde{s}, \sigma_{-i})$. Si definimos σ' como la estrategia igual a σ para todas las acciones distintas de s y $\tilde{s}$, pero que juega $\tilde{s}$ con probabilidad 0 y juega s con probabilidad $\sigma(s) + \sigma(\tilde{s})$, en otras palabras σ' está definido como,

$$\sigma'(a) = \begin{cases} \sigma(a) & \text{si } a \neq s, a \neq \tilde{s} \\ \sigma(s) + \sigma(\tilde{s}) & \text{si } a = s \\ 0 & \text{si } a = \tilde{s} \end{cases}$$

se tendrá que $u_i(\sigma, \sigma_{-i}) < u_i(\sigma', \sigma_{-i})$, lo cual contradice la definición de estrategia dominante.²

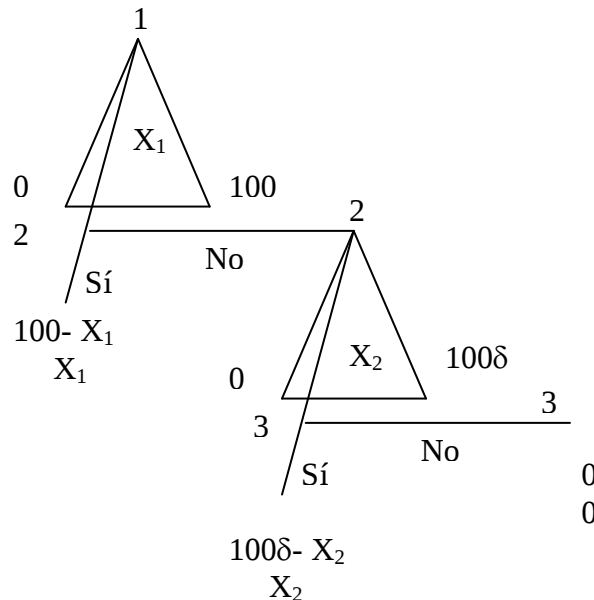
Luego se debe tener que $u_i(s, \sigma_{-i}) = u_i(\tilde{s}, \sigma_{-i})$ para todo σ_{-i} , para todo s y $\tilde{s}$, tal que σ asigna probabilidad positiva. Esto es una contradicción porque implica que $u_i(\sigma, \sigma_{-i}) = u_i(s, \sigma_{-i})$ para todo σ_{-i} , y por definición de estrategia dominante se debe cumplir $u_i(\sigma, \sigma_{-i}) > u_i(s, \sigma_{-i})$ para algún σ_{-i} .

² Notar que de la misma forma se puede demostrar que si una estrategia mixta es mejor respuesta, las acciones a las cuales asigna probabilidad positiva deben dar la misma utilidad.

Problema 3.

Juego del n-ultimátum

a) Para $n=3$ se tiene el siguiente árbol:



Un *Equilibrio de Nash*³ considera que la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores.

En este caso debemos considerar que el primer jugador debe recibir como pago US\$50. Para que el jugador 1 pueda recibir 50 el jugador 2 debería aceptar la propuesta que le hace el 1, para ello el jugador tres debe amenazar de tal manera que al jugador 2 no le convenga rechazar lo que le ofrece el jugador 1. Por lo cuál las estrategias de cada jugador son de la siguiente manera.

Estrategias:

Jugador 1: Ofrece US\$50.

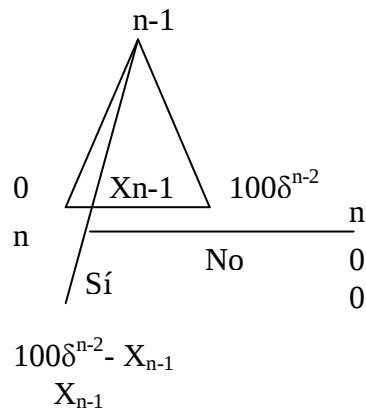
Jugador 2: Acepta solo si $X_1 \geq 50$ y ofrece $X_2 = 50$

Jugador 3: acepta solo si $X_2 > 50$.

Con estás estrategias se estaría cumpliendo un equilibrio de Nash, pues a nadie le conviene salir de la decisión que tomaron, dadas las estrategias de los demás jugadores.

- b) Sabemos que un Equilibrio Perfecto en el Subjuego se cumple si al considerar cada subárbol, la combinación de estrategias restringidas al subárbol es un equilibrio de Nash del juego restringido al subárbol. De otra manera, cada jugador juega en forma óptima en cada nodo del subjuego.
Sea el siguiente subárbol genérico.

³ Es una combinación de estrategias $S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*)$ tal que $\forall i, u_i(S_i^*, S_{-i}^*) \geq u_i(S_i, S_{-i}^*)$



Dado que tenemos este subárbol para cada jugador, debemos ver que pasa con la decisión del jugador $n-1$. Puesto que si el jugador n rechaza el ofrecimiento de $n-1$, ambos se quedarán con 0, el jugador $n-1$ debe ofrecer a n , $X_{n-1} \geq 0$, ofreciéndole lo mínimo que equivale a 0, quedándose el con $100\delta^{n-2}$.

Ahora para que el jugador $n-1$, acepte el ofrecimiento del jugador $n-2$, este debe ofrecerle un pago tal que:
 $X_{n-2} \geq 100\delta^{n-2}$, quedándose el con una paga de $100\delta^{n-3} - 100\delta^{n-2}$.

Veamos ahora el caso para el jugador $n-3$, para que el jugador $n-2$ acepta debe ofrecerle $X_{n-3} \geq 100\delta^{n-3} - 100\delta^{n-2}$, quedándose el con un pago de $100\delta^{n-4} - (100\delta^{n-3} - 100\delta^{n-2})$ y así sucesivamente, por lo cuál llegamos a que el pago para cualquier n es la siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-i} (1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 \dots\dots\dots)$$

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-i} \sum_{j=0}^{i-2} (-\delta)^j (*)$$

Por otro lado, sabemos que $\sum_{j=0}^{i-2} (-\delta)^j = \frac{1 + \delta^{i-1}}{(\delta + 1)}$

Remplazando este valor en (*), podemos concluir que la oferta que hace el jugador $n-i$, es la siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-i} \frac{(1 + \delta^{i-1})}{(1 + \delta)}$$

Luego, el pago que recibiría el jugador $n-i$, si le tocara ofrecer, sería

$$P_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)} - X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)} \frac{(1 + \delta^i)}{(1 + \delta)}$$

El outcome del juego, dada la estrategia anterior, será entonces que el jugador 1 ofrece

$$X_1 = \frac{100\delta(1 + \delta^{n-2})}{1 + \delta}$$

el jugador 2 acepta y 1 recibe un pago de

$$P_1 = \frac{100(1 + \delta^{n-1})}{1 + \delta}$$

C) Utilizando los resultados encontrados el parte b), tenemos que:

$$X_1 = \frac{100\delta(1 + \delta^{n-2})}{1 + \delta}, \text{ para encontrar la condición para que el jugador reciba US\$80, cuando}$$

$\lim n \rightarrow \infty$, con lo cuál llegamos a lo siguiente:

$$80(1 + \delta) = 100$$

$$\delta = \frac{1}{4} = 0.25$$