UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: IN51A Economía Industrial
Semestre: Primavera 2007
Profesor: Ronald Fischer
Auxiliares: Klaus Kaempfe
Sofía Moroni
Carlos Ramirez
Diego Vega

Auxiliar 10
Licitaciones

Problema 1

Suponga que el dueño de un cuadro organiza una licitación de sobre cerrado primer precio para venderlo. Es conocimiento común que la disposición a pagar de cada participante (v) se distribuye uniforme entre 0 y 200.

$a)$ Suponga que es conocimiento común que el número de participantes en la licitación es N. Demuestre que la combinación de estrategias en que la postura de cada participante es: $\frac{N-1}{N}v$ es un equilibrio de Nash. Explique intuitivamente lo que esta estrategia sugiere.

$b)$ Suponga ahora que es conocimiento común entre todos los participantes de la licitación que el número de interesados en el cuadro es N_1 con probabilidad p y $N_2 > N_1$ con probabilidad $1 - p$; y que el vendedor del cuadro sabe con certeza cuantas personas se interesan por el cuadro. Antes que los participantes en la licitación entreguen sus posturas el vendedor del cuadro declara el número de participantes; sin embargo, el dueño del cuadro puede mentir (y lo hará cada vez que aumente el precio esperado de venta del cuadro). Si los participantes en la licitación son crédulos, ¿qué hará el dueño del cuadro? Explique.

$c)$ Suponga que los participantes no son crédulos, y que anticipan que el dueño mentirá cada vez que logre aumentar el precio esperado de venta del cuadro. ¿cómo elegirán sus posturas si el dueño declara que $N = N_2$? No es necesario que calcule la postura óptima de cada participante, sólo explique.

$d)$ Cómo cambiarían sus respuestas en las partes anteriores si la licitación es de sobre cerrado, segundo precio.

Solución:

a) Sabemos que

$$b_j = \frac{n-1}{n} v_j$$

y que $v \longrightarrow$ U[0,200].

Nos interesa saber si es que la combinación de estrategias en que cada participante presenta posturas (b_i) es un equilibrio de Nash.

Al oferente le interesa maximizar su el valor esperado de su utilidad (asumimos que es averso al riesgo), es decir, la diferencia entre lo que esta dispuesto a pagar multiplicado por la probabilidad de ganar.

$$\underset{b_i}{Máx} U_i = (b_i - v_i) \Pr ob\,(b_i > b_j, \forall j \neq i)$$

Donde

$$\Pr ob\,(b_i > b_j, \forall j \neq i) = \prod_{j \neq i}^{n} \Pr ob\,(b_i > b_j) = \prod_{j \neq i}^{n} \Pr ob \left(b_i > \frac{n}{n-1} v_j \right)$$

Imponiendo simetría tenemos

$$\prod_{j \neq i}^{n} \Pr ob \left(b_i > \frac{n-1}{n} v_j \right) = \left[\Pr ob \left(b_i > \frac{n-1}{n} v_j \right) \right]^{n-1} =$$

$$\left[\Pr ob \left(\frac{nb_i}{n-1} > v_j \right) \right]^{n-1} = \left[\Pr ob \left(v_j < \frac{nb_i}{n-1} \right) \right]^{n-1}$$

Como sabemos que $v \lozenge$ U[0,200] podemos

$$\Pr ob\,(x < c) = \int_a^c \frac{dx}{b-a} = \frac{c}{b-a}$$

$$\Pr ob \left(v_j < \frac{nb_i}{n-1} \right) = \int_0^{\frac{nb_i}{n-1}} \frac{dv_i}{200} = \frac{1}{200} \left(\frac{nb_i}{n-1} \right)$$

Para no dificultar el trabajo algebraico llamaremos A a $\frac{1}{200}\left(\frac{n}{n-1}\right)$que es una constante.

Retomando nuestra maximización

$$\underset{b_i}{M?x} U_i = (b_i - v_i) A^{n-1} b_i^{n-1}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial b_i} = nA^{n-1} b_i^{n-1} - (n-1) v_i A^{n-1} b_i^{n-2} = 0$$

$$nb_i - v_i(n-1) = 0 \Leftrightarrow b_i = \frac{v_i(n-1)}{n}$$

Hemos demostrado que es un equilibrio de Nash, ya que no hay incentivos a salirse (es lo mejor que el oferente i puede hacer dado lo que hacen los otros oferentes j).

b) El vendedor del cuadro mentirá siempre, ya que las posturas son crecientes en N y la recaudación es creciente en las posturas, por lo que es su mejor estrategia[1].

$$\begin{aligned}\frac{N_1-1}{N_1}v_i &< \frac{N_2-1}{N_2}v_i \Leftrightarrow 1-\frac{1}{N_1} < 1-\frac{1}{N_2} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{N_1} &< -\frac{1}{N_2} \Leftrightarrow \frac{1}{N_1} > \frac{1}{N_2} \Leftrightarrow N_2 > N_1\end{aligned}$$

Por lo tanto para el vendedor es una estrategia dominante decir que hay N_2 participantes.

c) No considerarán la información que da el dueño, por lo que maximizarán el Valor esperado de su utilidad considerando que con probabilidad p hay N_1 participantes y que con probabilidad $1-p$ hay N_2.

d) Sabemos que en las licitaciones sobre cerrado segundo precio la estrategia dominante es ofrecer la valoración del artículo, es decir, $b_i = v_i$.[2] Luego nuestras respuestas en *a*) sería que $b_i = v_i$ es el equilibrio de Nash simétrico.
En *b*) y *c*) diríamos que el número de participantes no es relevante para decidir la postura, por lo que diga o deje de decir el dueño no tiene importancia.

Problema 2

Suponga que Ud. desea licitar una mina de cobre. Los n compradores saben cuánto cobre tiene la mina, pero dado que tienen costos de producción distintos, sus valoraciones de la mina son también distintas. Supondremos que estas valoraciones v_i están distribuidas independientemente y uniformemente en $[0,1]$ y que no existe aversión al riesgo entre los participantes en la licitación. El problema que usted enfrenta es como licitar para conseguir el mayor valor esperado posible. Usted dispone de dos opciones: licitación de segundo precio y licitación de primer precio.

a) La utilidad esperada por el participante i si hace una postura b_i está dada por $E(U_i|b_i) = (v_i - b_i)Prob\{b_i > Max_j(b_j), j \neq i\}$, donde $Prob\{b_i > Max_j(b_j) j \neq i\}$ es la probabilidad que la oferta b_i sea la mayor oferta. Utilice este resultado para encontrar las ofertas $b_i(v)$ que forman el equilibrio de Nash (simétrico) en el caso de licitación de primer precio.

b) Utilice las ofertas $b_i(v)$ obtenidas antes para calcular el valor que usted espera recibir en la licitación. (Nota: El valor esperado de una variable es la integral de la variable multiplicada por la probabilidad de la variable).

c) Usted ya conoce la oferta que debe hacer un participante en la licitación de segundo precio. Utilice esta información junto al hecho que la probabilidad de que el segundo valor más alto sea v es $n(n-1)v^{n-2}(1-v)$ para encontrar el valor que espera recibir en una licitación de segundo precio. ¿Cuál sistema prefiere usted?

Solución

a) Se sabe que

$$E\left(U_i/b_i\right) = \left(v_i - b_i\right) P\left(b_i \geq max\left(b_j\right)\right)$$

Además:
- Las valorizaciones son independientes
- Si $b_i \geq max\,(b_j)$implica que $b_i \geq b_j$ para $\forall j \neq i$ (son n-1 compradores)

Entonces

$$P\,(b_i \geq max b_j) = [P\,(b_i \geq b_j)]^{n-1} = [P\,(b_j \leq b_i)]^{n-1}$$

Esto deja nuestro problema de la siguiente forma:

$$E\,(U_i/b_i) = (v_i - b_i)\,[P\,(b_j \leq b_i)]^{n-1}$$

Ahora veamos cuanto es

$$P\,(b_j \leq b_i)$$

Para esto utilizaremos el supuesto inicial:

$$P\,(b_j \leq b_i) = P\left(\frac{n-1}{n}v_j \leq b_i\right) = P\left(v_j \leq \frac{n}{n-1}b_i\right) = \int_0^{\frac{n}{n-1}b_i} dv_j = \frac{n}{n-1}b_i$$

Por lo tanto nuestro problema queda así:

$$E\,(U_i/b_i) = (v_i - b_i)\left[\frac{n}{n-1}b_i\right]^{n-1}$$

Para encontrar el $b_i$óptimo se debe maximizar las utilidades esperadas.

$$\Rightarrow \frac{\partial E\,(U_i/b_i)}{\partial bi} = 0 \Rightarrow (v_i - b_i)\,(n-1)\left[\frac{n}{n-1}b_i\right]^{n-2}\frac{n}{n-1} - \left[\frac{n}{n-1}b_i\right]^{n-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow (v_i - b_i)\,n - \frac{n}{n-1}b_i = 0$$
$$\Leftrightarrow b_i = \frac{n-1}{n}v_i$$

Se puede observar que el jugador i haría exactamente lo mismo que el resto de los participantes, lo que nos llevará a un equilibrio de Nash simétrico.

$b)$ Sabemos que

$$E\,(U_{licitaodor}) = E\,(b_{max}) = \int b_i fbmax\,(b_i)$$

donde

$$fbmax\,(b_i)$$

es la función densidad de b_{max}

Para calcular $fbmax$se puede calcular la función de distribución (F) del b_{max} y luego derivarla con respecto a b.

$$F_{bmax}(a) = P(max(b_i) \leq a)$$

Pero:
- Las valorizaciones son independientes
- Si $max(b_i) \leq a$ implica que $b_i \leq a$ para $\forall i$ (son n compradores)
- En la parte a) se vio que

$$P(b_i \leq a) = \frac{n}{n-1}a$$

Entonces nos queda que

$$F_{bmax}(a) = \left[\frac{n}{n-1}a\right]^n$$

y falta sólo derivar.

$$f_{bmax}(b_i) = \frac{\partial F_{bmax}(b_i)}{\partial b_i} = n\left[\frac{n}{n-1}b_i\right]^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Con este resultado integramos.
Los límites de integración son los valores extremos que puede tomar nuestra variable b_i.Por el resultado obtenido en la parte a) y sabiendo que $v_i \to U[0,1]$ podemos concluir que:

$$b_i \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$$

Con esto en mente empezamos a integrar.

$$\int b_i f bmax(b_i) = \int_0^{\frac{n-1}{n}} b_i n\left[\frac{n}{n-1}b_i\right]^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)db_i = n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \int_0^{\frac{n-1}{n}} b_i^n db_i$$

$$= n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{1}{n+1}b_i^{n+1}\Big|_0^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$\Rightarrow E(U_{licitador}) = \frac{n-1}{n+1}$$

c) Primero veamos que estrategia utiliza cada jugador en licitación de segundo precio:
Sea $r_i = max(b_{-i})$ donde b_{-i} es la postura de los demás compradores potenciales.
Caso 1: Sea $b_i > v_i$

- Si $r_i \leq v_i < b_i$, entonces la persona i gana la licitación y sus utilidades serán $v_i - r_i \geq 0$ ya que deberá pagar el segundo precio más alto. Además

$$U(b_i, b_{-i}) = U(v_i, b_{-i})$$

- Si $v_i < r_i \leq b_i$, entonces la persona i gana la licitación, pero su utilidad sería $v_i - r_i \leq 0$. Pero

$$U(b_i, b_{-i}) < U(v_i, b_{-i})$$

- Si $v_i < b_i \leq r_i$, entonces la persona i **no** gana la licitación y su utilidad es 0. Además

$$U(b_i, b_{-i}) = U(v_i, b_{-i}) = 0$$

En este caso elegir $v_i$domina débilmente a b_i

Caso 2: Sea $b_i < v_i$

- Si $r_i \leq b_i < v_i$, entonces la persona i gana la licitación y sus utilidades serán $v_i - r_i > 0$ ya que deberá pagar el segundo precio más alto. Además

$$U(b_i, b_{-i}) = U(v_i, b_{-i})$$

- Si $b_i < r_i \leq v_i$, entonces la persona i **no** gana la licitación y su utilidad sería 0, pero

$$U(b_i, b_{-i}) = 0 \leq U(v_i, b_{-i}) = v_i - r_i$$

- Si $b_i < v_i \leq r_i$, entonces la persona i **no** gana la licitación y su utilidad es 0.

Además

$$U(b_i, b_{-i}) = U(v_i, b_{-i}) = 0$$

En este caso elegir $v_i$domina débilmente a b_i. Por lo tanto $b_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante.

Volvamos entonces al problema suponiendo que $b_i = v_i$ además suponemos que:

$$P(v_{segundo+alto}) = n(n-1)v^{n-2}(1-v)$$

Entonces el problema queda así:

$$E(U_{licitador}) = E(v_{segundo+alto}) = \int_0^1 v \cdot n(n-1)v^{n-2}(1-v)\,dv$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \left\{ \int_0^1 v^{n-1}dv - \int_0^1 v^n dv \right\} = n \cdot (n-1) \cdot \left\{ \left.\frac{v^n}{n}\right|_0^1 - \left.\frac{v^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 \right\}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = n \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)} \right) = \frac{n(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow E(U_{licitador}) = \frac{n-1}{n+1}$$

Se puede observar que la utilidad esperada del licitador es independiente del tipo de licitación que utilice.

Sin embargo se sabe que la licitación de segundo precio es más sensible a la colusión ya que si alguno de los jugadores se sale de la colusión no obtiene una utilidad mayor.

En el caso de la licitación de primer precio, si uno de los jugadores ofrece un ϵ más que el acordado en la colusión, éste ganará la licitación y su utilidad sería mayor. Por esta razón sostener una colusión en licitación de primer precio es más difícil.

Problema 3

Considere la siguiente licitación: dos participantes deciden simultáneamente pagan $b_i \in [0,1]$ pero sólo la más alta recibe un peso. Muestre que el juego no tiene equilibrio en estrategias puras y caracterice el equilibrio en estrategias mixtas.

Solución

Los dos jugadores simultáneamente pagan b_i (entre 0 y 1) y sólo la más alta recibe un peso. Los pagos son:

$$\pi_1(b_1,b_2) = \begin{array}{ll} 1-b_1 & \text{si } b_1 > b_2 \\ 0{,}5-b_1 & \text{si } b_1 = b_2 \\ -b_1 & \text{si } b_1 < b_2 \end{array}$$

Para analizar el equilibrio en estrategias puras veremos los casos:

• Si $b_1 > b_2$:

$$U_2(b_1,b_2) = -b_2 < 0$$

Pero el jugador 2 tiene incentivos a cambiar su estrategia pues si define $b_2^* > b_1$ se tiene que

$$U_2(b_1,b_2*) = 1 - b_2^* > 0$$

• Si $b_1 < b_2$

$$U_1(b_1,b_2) = -b_1 < 0$$

Pero el jugador 2 tiene incentivos a cambiar su estrategia pues si define $b_1^* > b_2$ se tiene que

$$U_1(b_1^*,b_2) = 1 - b_1^* > 0$$

• Si $b_1 = b_2$ (con $b_i < 1$): En este caso ambos tienen incentivos a cambiar su estrategia, en efecto:

$$U_i(b_i,b_{-i}) = \frac{1}{2} - b_i < U_i(b_i+\epsilon,b_{-i}) = 1 - b_1$$

• Si $b_i = 1$: En este caso el jugador i tiene incentivos a cambiar su estrategia (aunque gane!!), en efecto:

$$U_i(b_i,b_{-i}) = 1 - b_i = 0 < U_i(b_i-\epsilon,b_{-i}) = 1 - b_i + \epsilon > 0 \ \forall b_{-i}, sib_{-i} \neq 1$$

• Si $b_1 = b_2 = 1$: En este caso ambos jugadores tienen incentivos por si mismos para cambiar su estrategia, en efecto:

$$U_i(b_i, b_{-i}) = -\frac{1}{2} < U_i(b_i*, b_{-i}) = 0 \forall b_i* \neq b_i$$

Ya hemos visto que siempre al menos uno de los jugadores (oferentes) tiene incentivos a salirse, por lo que no hay equilibrio de Nash en estrategias puras. Sin embargo sabemos que el Teorema de Nash dice que todo juego finito tiene un equilibrio (de Nash) en estrategias mixtas[3].

Sabemos que el jugador i debe estar indiferente entre las estrategias, luego la función de distribución $(f(b_j))$ debe cumplir que[4]:

$$E(U_i(b_i)/f(b_j)) = E(U_i(b_i*)/f(b_j)) \forall i, \forall b_i, \forall b_j$$

Es decir

$$E(U_1(b_1)/f(b_j)) = E(U_1(b_1*)/f(b_2)) \forall b_1^*$$

Sin pérdida de generalidad podríamos decir que

$$E(U_1(b_1)/f(b_j)) = k \forall b_1$$

por lo tanto tenemos que

$$(1-b_1)P(b_1 > b_2) + (0{,}5 - b_1)\,P(b_1 = b_2) - b_1 P(b_1 < b_2) = k$$

Como las probabilidades son sobre funciones de distribución continuas la probabilidad de estar en un punto específico es despreciable (distribución no atómica) $=> P(b_1 = b_2) = 0$. Entonces

$$(1-b_1)P(b_1 > b_2) - b_1 P(b_1 < b_2) = k \Leftrightarrow$$
$$(1-b_1)P(b_1 > b_2) - b_1\left[1 - P(b_1 > b_2)\right] = k$$

$$P(b_1 > b_2) - b_1 = k$$

Lo que es bastante razonable pues está última expresión es el valor esperado del pago (uno por la probabilidad de ganar) menos el costo de la oferta (siempre hay que pagar la postura). Además sabemos que:

$$P(b_1 > b_2) = P(b_2 < b_1) = F_2(b_1) = \int_0^{b_1} f_2(t)dt$$

Por propiedades de la funciones de distribución se cumple que:

$$F_2(1) = \int_0^1 f_2(t)dt = 1$$

$$F_2(0) = \int_0^0 f_2(t)dt = 0$$

Incorporando esto

$$F_2(b_1) - b_1 = k \forall b_1$$

Evaluando en los límites

- Si $b_1 = 1 => F_2(1) - 1 = 1 - 1 = 0 = k$
- Si $b_1 = 0 => F_2(0) - 0 = 0 - 0 = k$

Como ya sabemos que $k = 0$.) se concluye que

$$F_2(b_1) - b_1 = 0 \forall b_1$$
$$F_2(b_1) = b_1 \forall b_1$$

Propiedad que sólo cumple la distribución uniforme y considerando el hecho de que el juego es simétrico, podemos concluir que las posturas siguen una distribución uniforme:

$$b_i \to U[0,1] \forall i$$