Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

Profesor : Ronald Fischer
Auxiliares : Klaus Kaempfe, Sofía Moroni
Carlos Ramirez, Diego Vega

Auxiliar Nº8

Problema 1 (Un problema de agencia en duopolio)

Suponga una industria de un bien homogéneo en la que compiten dos firmas, 1 y 2. La demanda viene dada por $p = 2 - Q$, donde Q y p representan la cantidad total vendida y el precio, respectivamente. Sea q_i la cantidad vendida por cada firma. Sean R_i y π_i los ingresos y las utilidades de cada firma, respectivamente. El costo unitario de producción es $c = 1$. Las firmas compiten en cantidades. Los dueños de las empresas contratan gerentes y les ofrecen un esquema de bonos de compensación M_i , definidos como:

$$M_i = \mu_i[\alpha_i\pi_i + (1-\alpha_i)R_i] \qquad \alpha_i, \mu_i \in [0,1]$$

Este es un juego en dos etapas. En la primera, los empresarios eligen α_i ,μ_i para maximizar sus utilidades. En la segunda etapa del juego, los gerentes eligen las cantidades a vender de manera de maximizar su ingreso. Las utilidades de las firmas (π_i) son el ingreso menos los costos. A los dueños les interesan las utilidades menos el pago a los gerentes.

a) Encuentre las funciones de reacción de las ventas de las compañías (segunda etapa).
b) Encuentre el equilibrio: precios, ventas y utilidades de cada firma.
c) Encuentre el valor óptimo de M_i para los dueños (primera etapa).
d) Usando el valor anterior, encuentre las funciones de reacción α_i de cada dueño y utilícelas para encontrar el equilibrio entre los dueños.
e) ¿Por qué es bueno para una firma el introducir un esquema en que se da un premio por ingreso, y no sólo por utilidades?

Solución

a) Cada gerente $i \quad i \in 1, 2$ resuelve

$$\max_{q_i} \mu_i[\alpha_i\pi_i + (1-\alpha_i)R_i]$$

esto es

$$\max_{q_i} \mu_i[\alpha_i(q_i(2-q_i-q_j) - cq_i) + (1-\alpha_i)q_i(2-q_i-q_j)] \quad j \neq i$$

$$\max_{q_i} \mu_i[q_i(2-q_i-q_j) - \alpha_i c q_i] \quad j \neq i$$

CPO:

$$\mu_i(2 - 2q_i - q_j - \alpha_i c) = 0 \quad \Rightarrow q_i = \frac{2 - q_j - \alpha_i c}{2} \tag{1}$$

b)

$$q_j = \frac{2 - q_i - \alpha_j c}{2} \Rightarrow q_i = 2 - 2q_j - \alpha_j c \tag{2}$$

Buscamos el equilibrio de Nash, igualando (1) y (2):

$$\frac{2 - q_j - \alpha_i c}{2} = 2 - 2q_j - \alpha_j c \Rightarrow q_j = \frac{2 - 2\alpha_j c + \alpha_i c}{3}, \quad q_i = \frac{2 - 2\alpha_i + \alpha_j}{3}$$

De aquí derivamos la demanda y las ganancias:

$$p = 2 - \frac{(4-\alpha_j c - \alpha_i c)}{3} = \frac{2+\alpha_j c+\alpha_i c}{3} \overset{c=1}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{2+\alpha_j+\alpha_i}{3}$$

$$\pi_i = \frac{2+\alpha_j c+\alpha_i c}{3}\cdot\frac{2-2\alpha_i+\alpha_j}{3} - c\frac{2-2\alpha_i+\alpha_j}{3} = \frac{2+c(\alpha_j+\alpha_i-3)}{9}\cdot(2-2\alpha_i c+\alpha_j c)$$

$$\overset{c=1}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{\alpha_j+\alpha_i-1}{9}\cdot(2-2\alpha_i+\alpha_j)$$

c) Los dueños resuelven, sabiendo cómo actuarán los gerentes:

$$\max_{\alpha_i,\mu_i} \pi_i - \mu_i[\alpha_i\pi_i - (1-\alpha_i)R_i]$$

$$\max_{\alpha_i,\mu_i} \quad (1-\mu_i)\underbrace{\frac{2+\alpha_j+\alpha_i}{3}\cdot\frac{2-2\alpha_i+\alpha_j}{3}}_{p\cdot q} - (1-\mu_i\alpha_i)\underbrace{\frac{2-2\alpha_i+\alpha_j}{3}}_{cq}$$

$$\max_{\alpha_i,\mu_i} \quad \frac{(1-\mu_i)(2+\alpha_j+\alpha_i)-(1-\mu_i\alpha_i)3}{3}\cdot\frac{2-2\alpha_i+\alpha_j}{3}$$

$$\max_{\alpha_i,\mu_i} \quad \frac{(\alpha_j+\alpha_i-1)-\mu_i(2-2\alpha_i+\alpha_j)}{9}\cdot(2-2\alpha_i+\alpha_j)$$

Es decir M_i será tal que α_i, μ_i resuelven el problema de optimización anterior.

d) Como la función que maximizan los dueños es lineal en μ_i y se tiene que $(2-2\alpha_i+\alpha_j) = 3q_i \geq 0$, tendremos que los dueños elegirán $\mu_i = 0$ además, la CPO será:

$$\frac{1}{9}(2-2\alpha_i+\alpha_j) - 2\frac{(\alpha_j+\alpha_i-1)}{9} = 0 \tag{3}$$

De (3) tendremos:

$$\alpha_i = \frac{4-\alpha_j}{4}$$

Luego,

$$\frac{4-\alpha_j}{4} = 4-4\alpha_j \Rightarrow \alpha_j = \frac{4}{5} = \alpha_i$$

e) Las ganancias de las firmas en este caso serán:

$$\pi_i = \frac{(8/5-1)(2-4/5)}{9} = 0{,}6 * 1{,}2/9 = 0{,}08$$

es decir serán menores que en el caso de competencia Cournot. Sin embargo, este tipo de bonos hacen que el gerente quiera abarcar una mayor porción del mercado que lo que abarcaría si su sueldo fuera proporcional a las ganancias. Esto muchas veces es deseable para las empresas por diversas razones. Puede ser, por ejemplo que al tener una mayor porción del mercado tengan mayor poder de mercado, para negociar por ejemplo con los proveedores y así disminuir costos (lo cual no está modelado en este problema).

Problema 2 Considere el mercado de los trajes de baños de lana, el que tiene una función de demanda inversa dada por $p(q) = 100 - q$. La función de costos del monopolio es $C(q) = q^2 + 10q$

a) Si la firma se comportase de manera competitiva, encuentre el precio resultante, la cantidad producida y la utilidad.

b) Caracterice el equilibrio considerando el comportamiento monopolístico de la firma.

El regulador desea implementar una solución que induzca el comportamiento competitivo. Para lograrlo usa un doble mecanismo: Por un lado se le paga un subsidio al monopolio de s por unidad vendida (es decir, la función de costos del monopolio será $C(q) = q^2 + 10q - sq$. Además el regulador fija un impuesto sobre las utilidades (incluyendo los ingresos por subsidio) del monopolio, por lo que la función de utilidades del monopolio queda $(1-t)[pq - (q^2 + 10q - sq)]$

El regulador desea que el efecto para las arcas fiscales sea neutro (es decir, el gasto debido a los subsidios debe ser exactamente compensado por el impuesto a las utilidades). Dado esto, se deja operar al monopolio para que fije la cantidad producida.

c) Encuentre el subsidio s y el impuesto t que usará el regulador.

Solución

a) Competencia

$$p = Cmg \Rightarrow p = 2q + 10 = 100 - q \Rightarrow q = 30, p = 70$$

b) Monopolio

$$\pi = (100 - q)q - q^2 - 10q$$

La CPO es

$$100 - 2q - 2q - 10 = 0 \Rightarrow q = \frac{90}{4}$$

c) El monopolio resuelve

$$\begin{aligned} \text{máx}\,\pi &= (1-t)(pq - (q^2 + 10q - sq)) \\ \frac{\partial \pi}{\partial q} &= 0 \Rightarrow q = \frac{90+s}{4} \\ &\Rightarrow s = 30 \Rightarrow \pi = 1800 \end{aligned}$$

Por último, se debe cumplir que

$$900 = t1800 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Problema 3
Suponga un mercado en que la demanda por el producto es:

$$X^d = \begin{cases} \frac{S}{p} & \text{si } p \leq p_0 \\ 0 & p > p_0 \end{cases}$$

donde S es un parámetro que determina el tamaño del mercado. Para entrar a este mercado se requiere hundir un costo σ. Además, para todas las empresas el costo variable de producción es c por unidad.
El juego entre las empresas ocurre en dos etapas. En la primera ($t = 1$) las empresas deciden si entran o no al mercado. Las que entran hunden el costo σ; las que permanecen afuera no lo pagan. En la segunda etapa del juego ($t = 2$) las n empresas que entraron y hundieron el costo σ compiten a la Cournot. Vale decir, las n empresas eligen simultáneamente la cantidad que producen. Una vez que cada empresa i decide su producción x_i la cantidad total producida es $X^S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y el precio es:$p = \frac{S}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$el necesario para que se venda toda la cantidad producida, vale decir $X^d = X^s$. En equilibrio (de Nash), la producción de la empresa i, x_i^*, maximiza la utilidad de i dado que $\sum_{j \neq i}^{n} x_j^*$, y esto para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Para simplificar sus cálculos suponga que n, el número de empresas activas es continuo.

a) Escriba el problema de maximización que resuelve cada una de las n empresas activas cuando compite en el merado del producto. Luego obtenga la cantidad total producida en equilibrio. (Ayuda: note que todas las empresas son idénticas, luego el equilibrio debe ser simétrico.)

b) Muestre que el precio de equilibrio cae con el número de firmas (eje horizontal) (vale decir, grafique la relación $p(n)$). Explique que dice esta relación. ¿Qué pasa con el margen $p - c$ a medida que n aumenta?

c) Considere ahora la decisión de entrada en $t = 1$. En clases vimos que la sustentabilidad implica que una condición necesaria para el equilibrio es

$$(p - c)\frac{X^d(p)}{n} = \sigma \tag{4}$$

Explique qué significa esta relación. Luego demuestre que la relación entre p y n es creciente. Finalmente explique económicamente por qué la relación es creciente.

d) Muestre que en equilibrio

$$n* = \sqrt{\frac{S}{\sigma}} \tag{5}$$

$$P* = c\left(\frac{1}{\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2} - 1} + 1\right) \tag{6}$$

Explique esta relación.

Solución

a) El problema de las firmas es maximizar utilidades considerando que el precio depende de la cantidad que producen c/u por sí sola (x_i) y el total (X), por esto primero encontraremos una función de utilidades:

$$\pi = p(x_i, X)x_i - cx_i = (p-c)\,x_i = \left(\frac{S}{X} - c\right)x_i \tag{9.1}$$

$$\pi = \left(\frac{S}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ji}} - c\right)x_i = \left(\frac{S}{x_i + \sum\limits_{j\neq i}^{n} x_j} - c\right)x_i$$

Luego podemos maximizar:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = \left(\frac{S}{x_i + \sum\limits_{j\neq i}^{n} x_j} - c\right) + \left(-\frac{Sx_i}{(x_i + \sum\limits_{j\neq i}^{n} x_j)^2}\right) = 0 \tag{9.2}$$

Pero sabemos que el equilibrio es simétrico, por lo tanto se cumple que:

$$\sum_{j\neq i}^{n} x_j = (n-1)x_i \tag{9.3}$$

Sustituyendo la condición de simetría tenemos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = \left(\frac{S}{nx_i} - c\right) - \frac{Sx_i}{(nx_i)^2} = 0 \tag{9.4}$$

Recurriendo a un poco de álgebra:

$$Sn - cn^2 x_i - S = 0 \tag{9.5}$$

$$x_i = \frac{S(n-1)}{cn^2}$$

entonces la cantidad total producida en equilibrio será:

$$X^S = nx_i = \frac{S(n-1)}{cn} \tag{9.6}$$

b) El precio lo encontramos sustituyendo la cantidad producida en equilibrio en la demanda (estamos suponiendo que la restricción de precio no es activa):

$$P = \frac{S}{X} = \frac{Scn}{S(n-1)} = \frac{cn}{n-1} \tag{9.7}$$

Para ver que pasa cuando aumenta el número de firmas evaluaremos la derivada:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{c(n-1) - cn}{(n-1)^2} = \frac{cn - c - cn}{(n-1)^2} = \frac{-c}{(n-1)^2} \leq 0 \tag{9.8}$$

Lo que nos está indicando la derivada es que al aumentar número de firmas el precio cae, lo que es bastante lógico ya que disminuye el poder de mercado de las firmas y por ende el margen $p - c$ cae también, además podemos notar que cuando n es muy grande el mercado se aproxima a competencia perfecta, es decir, el precio tiende al costo marginal (margen es cercano a cero). Graficamente (Ver figura 9.1)

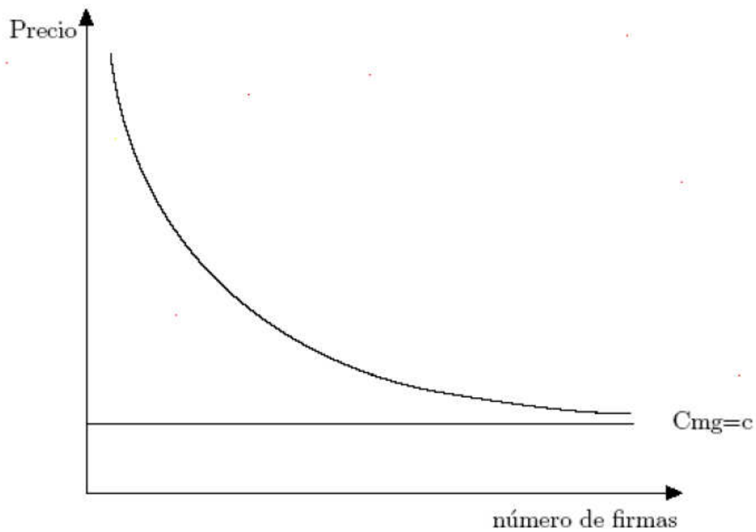

Figura 9.1: Sutton: La curva pp

OJO: La curva $P(n)$ es asintótica en el eje x en $p = c$, que sería el precio de competencia perfecta.

c) La condición de sustentabilidad es:

$$(p - c)\frac{X^d(p)}{n} = \sigma \tag{9.9}$$

lo que es equivalente a imponer una restricción de participación, es decir, las utilidades de las firmas que participen en este mercado tienen que ser no negativas. En efecto: $\pi = px_i - cx_i - \sigma \geq 0$. Obviamente es una restricción activa, en caso contrario en este mercado habría rentas excesivas por lo que entrarían nuevas empresas, esto ocurriría hasta que la condición se cumpla en igualdad:

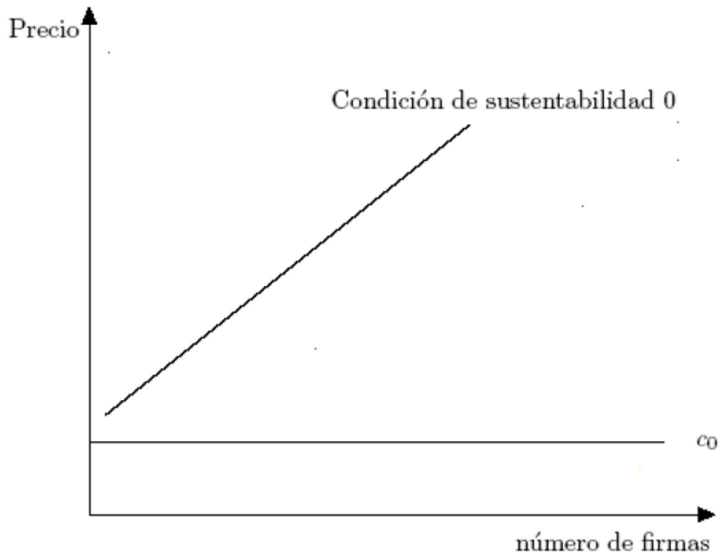

Figura 9.2: Sutton: La curva ss.

$$\begin{aligned}\pi = px_i - cx_i - \sigma = (p-c)x_i - \sigma = 0 \\ \Leftrightarrow (p-c)\frac{X^d(p)}{n} - \sigma = 0 \\ \Leftrightarrow (p-c)\frac{X^d(p)}{n} = \sigma\end{aligned} \tag{9.10}$$

La condición se puede interpretar como que el margen (diferencia entre el precio y el costo marginal: $p - c$) debe ser tal que dada la participación de mercado que la empresa alcanza en la industria ($\frac{X}{n}$) le permita generar ingresos netos que sean equivalentes al costo hundido (para que haya utilidades estrictamente nulas) o "financiarse".

Veamos que pasa cuando aumenta el número de firmas pero la demanda se mantiene constante:

$$(p-c)\frac{X(p)}{n} = (p-c)\frac{S}{np} = \sigma \Leftrightarrow p = \frac{cS}{S - n\sigma} \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\sigma Sc}{(S-n\sigma)^2} > 0 \tag{9.12}$$

Es decir, para mantener la sustentabilidad del mercado cuando aumenta el numero de firmas (y esto no tiene efecto en la cantidad demandada) hay que subir el margen (para así cubrir los costos hundidos) ya que disminuyo la cantidad vendida por c/u de las empresas (o participación de mercado). Un gráfico explicativo (ver figura 9.2):

OJO: La curva $P(n)$ es derivada de la condición de utilidad nula, es decir, para que el mercado sea sustentable. En este caso el efecto es que al aumentar n cada empresa tiene una menor porción del mercado (cte) por lo que para "financiarse" (hacer utilidades cero) debe subir el margen.

En este caso el efecto es que al aumentar n cada empresa tiene una menor porción del mercado (cte) por lo que para "financiarse" (hacer utilidades cero) debe subir el margen.

d) Imponiendo el equilibrio tenemos:

$$X^S = X^D \Longleftrightarrow \frac{S(n-1)}{cn} = \frac{S}{P} \Rightarrow P = \frac{cn}{n-1} \tag{9.13}$$

reemplazando en la condición de sustentabilidad:

$$(P-c)\frac{S}{Pn} = \sigma \Longleftrightarrow \left(\frac{cn}{n-1} - c\right)\frac{S(n-1)}{cn^2} = \sigma \tag{9.14}$$

$$\left(\frac{cn - cn + c}{n-1}\right)\frac{S(n-1)}{cn^2} = \sigma$$

Con un poco de álgebra:

$$\frac{S}{n} = \sigma \Leftrightarrow n^* = \sqrt{\frac{S}{\sigma}} \tag{9.15}$$

Podemos ver que al aumentar las barreras de entrada o disminuir el tamaño de mercado el número de firmas disminuye. Esto se debe a que hay mayores costos hundidos y disminuye la "torta" a repartir (respectivamente) por lo que si disminuye el número de firmas suben el precio hasta compensar estos efectos.

Sabemos además que las utilidades son nulas:

$$(p-c)\frac{X^D}{n} - \sigma = 0 \Longleftrightarrow (p-c)\frac{S(n-1)}{n^2 c} = \sigma \tag{9.16}$$

$$p = \frac{\sigma n^2 c}{S(n-1)} + c = \frac{c}{n-1} + c$$

$$P^* = c\left(\frac{1}{\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2} - 1} + 1\right) \tag{9.17}$$

Podemos ver que el precio es mayor que el costo marginal debido a la existencia de costos hundidos, si no los hubiera ($\sigma = 0$) estaríamos en competencia perfecta, ya que $P = c$. Además vemos que al crecer el mercado los precios disminuirán debido a que cae el margen necesario para financiar los costos hundidos.