Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

Profesor : Ronald Fischer
Auxiliares : Klaus Kaempfe, Sofía Moroni
Carlos Ramirez, Diego Vega

Auxiliar Nº5

Problema 1

Suponga que hay un continuo de empresarios (cada uno con riqueza W) indexados por $i \in [0,1]$. El empresario i decide si depositar su dinero en el banco (a una tasa ρ) o invertir en el proyecto i. Los proyectos requieren una inversión I. El banco presta dinero a una tasa r. Los agentes son neutrales al riesgo. Los proyectos tienen distintas probabilidades de éxito p_i, las que están distribuidas uniformemente entre 0 y 1. Cada empresario conoce su probabilidad de éxito, pero el banco sólo conoce la distribución de p_i. El empresario paga el interés del préstamo sólo si el proyecto tiene éxito, ya que si no entra en bancarrota. Todos los proyectos tienen igual retorno esperado: $p_i R_i = p_j R_j = R, \forall i, j$. Además se cumple que $R \geq (1+r)(I-W) \geq 0$.

1. Demuestre que la Utilidad esperada del empresario es decreciente en p_i y concluya que el empresario sólo pide prestado (es decir, invierte) si $p_i \leq p^*$, donde p^* es tal que la utilidad esperada del empresario es igual a $W(1+\rho)$.
2. Demuestre que la utilidad esperada del banco es $r(I-W)p^{*2}/2$.
3. Derive la utilidad esperada del banco con respecto a r e identifique los dos efectos que se contraponen. Relacione uno de ellos con la selección adversa. Note que p^* depende de r.
4. Concluya por qué en los mercados financieros hay un exceso de demanda, es decir, por qué aunque haya gente dispuesta a pedir prestado a una tasa mayor que r, el banco no sube la tasa de interés y a esa gente no se le presta (racionamiento de crédito).

Problema 2

En un esfuerzo por impulsar la industria local, el Gobierno del lejano país Primitivia ofrece a los productores que instalen una fábrica en territorio nacional prohibir la importación del producto en cuestión, otorgándole un virtual monopolio legal. La empresa Neumalos acepta la oferta del Gobierno e instala una fábrica de neumáticos.

Los ejecutivos de Neumalos deben resolver cómo manejar el tema de la distribución, en particular evalúan si usar un distribuidor exclusivo o bien hacerlo directamente. La labor del distribuidor es importante para el éxito del negocio, pues realiza el esfuerzo publicitario (e), el que a su vez aumenta la demanda por neumáticos, dada por $q = 4 + e - p$. La tarea de seleccionar al distribuidor (ya sea para adquirirlo o bien para contratarlo como distribuidor exclusivo) es complicada pues existen dos tipos de distribuidores, diferenciados por el costo del esfuerzo publicitario, el que no es observado por el fabricante antes de contratarlo o adquirirlo. Con probabilidad $1/2$ los distribuidores son de tipo 1, con costo de esfuerzo e^2 y con probabilidad $1/2$ son de tipo 2, con costo de esfuerzo $2e^2$.

1. Suponga que el fabricante decide adquirir un distribuidor y desarrollar la tarea de distribución y el esfuerzo de promoción internamente.
    a) Plantee la expresión para la utilidad esperada de Neumalo antes de adquirir al distribuidor.
    b) Encuentre el precio y la cantidad vendida de neumáticos y el nivel de esfuerzo publicitario que ejerce la empresa para cada tipo de distribuidor. Compare y explique las diferencias.
    c) Encuentre la utilidad esperada de Neumalo antes de adquirir al distribuidor.
2. Suponga ahora que el fabricante opta por la alternativa de contratar a un distribuidor exclusivo ya que la integración vertical está prohibida. La única variable que Neumalo controla en forma directa es el precio

mayorista de los neumáticos al distribuidor, dado por P_w. El fabricante elige el precio final de los neumáticos y su nivel de esfuerzo publicitario (P_i y e_i respectivamente, donde el subíndice i se refiere al tipo del distribuidor; y éstos son verificables). Neumalo ofrece un par de contratos que especifican 1 el precio mayorista p_{w_i} , el esfuerzo publicitario e_i y el precio final p_i que debe cobrar el distribuidor. Al momento de firmar el contrato ni Neumalo ni el distribuidor conocen el costo de esfuerzo (es decir, el tipo del distribuidor) y los contratos deben estar diseñados para que el distribuidor se autoseleccione.

a) Sin hacer cálculos: ¿Cómo es el bienestar social en este segundo caso en comparación con el obtenido en la parte 1 de esta pregunta? Explique.

b) Plantee y resuelva el problema que enfrenta cada tipo de distribuidor al momento de firmar el contrato. Use la notación e_i, P_i y P_{w_i}. Encuentre las utilidades, cantidades, precios y esfuerzo como función de los precios mayoristas P_{w_i}.

c) Plantee el problema que enfrenta Neumalo al momento de ofrecer el contrato al distribuidor. Sea cuidadoso, recuerde incorporar las restricciones apropiadas. Determine las restricciones activas y explique por qué son activas. Suponga que la utilidad de reserva de ambos distribuidores es 3/2.

Problema 3

Considere el siguiente problema de producción en equipo. Un grupo de investigadores debe desarrollar un nuevo producto. Hay n científicos en el laboratorio, y e_i es el esfuerzo que hace el científico i. El valor del nuevo producto depende del esfuerzo de cada científico: $V = \sum_i^n \sqrt{e_i}$. El salario de los científicos es w_i, y suponemos que son los dueños de la empresa, de manera que $\sum_i^n w_i = V$. Las preferencias son idénticas: $U_i = w_i - e_i$. Considere sólo equilibrios simétricos.

1. Suponga que no hay problemas de observabilidad (todos pueden verificar cuanto se esfuerzan los demás), de manera que todos trabajan para maximizar la utilidad promedio, $U = V/n - e$. Encuentre el nivel de esfuerzo correspondiente.
2. Suponga que, tal como en la vida real, se distribuye el valor V en partes iguales, independientes de los esfuerzos que realiza cada agente, el que no se puede verificar. Cada agente maximiza su utilidad independientemente de los demás. Encuentre el esfuerzo de equilibrio.
3. Muestre que en el segundo caso la ineficiencia aumenta a medida que aumenta el número de científicos y que en particular, mientras más científicos en el laboratorio, más bajo el bienestar. ¿Qué tipo de problema genera la información imperfecta en este caso?

Pauta Auxiliar Nº5

Problema 1

1. Las utilidades esperadas de la firma son

$$U = p_i(R_i - (I - W)(1 + r)) - W(1 + \rho)$$

Se invierte si $U \geq 0$.

$$U = R - p_i(I - W)(1 + r) - W(1 + \rho)$$

Luego U es decreciente en p_i. Veamos para qué valores de p se cumple $U = 0$.

$$R - p^*(I - W)(1 + r) - W(1 + \rho) = 0 \Rightarrow p^* = \frac{R - W(1 + \rho)}{(I - W)(1 + r)}$$

Si $0 < p^* < 1$ tendremos que no todos los empresarios invertirán. Sólo aquellos con $p_i \leq p^*$ lo harán.

2. Las ganancias del banco serán

$$U_B = \int_0^{p^*} (I - W) r p dp = \frac{p^2}{2}(I - W) r \Big|_0^{p^*} = \frac{p^{*2}}{2}(I - W) r$$

3. La derivada de las ganancias del banco será

$$\frac{\partial U_B}{\partial r} = \underbrace{\frac{\partial p^*}{\partial r}(I - W) r}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{p^{2*}}{2}(I - W)}_{\geq 0}$$

El primer término se asocia con selección adversa pues a mayor r los empresarios más exitosos no querrán invertir ya que el crédito es caro. Sólo los que tienen poca probabilidad de éxito querrán invertir porque tienen poca probabilidad de pagar el crédito y para ellos es relativamente más barato.

4. Si r es muy grande se tendrá que $\frac{\partial U_B}{\partial r} < 0$ luego el banco tendrá una tasa máxima que le conviene cobrar. Si no hay suficiente dinero para prestarle a todos los que están dispuestos a pagar la tasa, entonces habrá un racionamiento del crédito (la tasa no se fija hasta que la demanda iguala la oferta pues subir la tasa mucho no es conveniente para el banco)

Problema 2

1)

a.- La demanda está dada por: q = 4 + e – p.

Existen dos tipos de distribuidores (D), 1 y 2.

Costos del esfuerzo del distribuidor: $c_1^e = e^2$ y $c_2^e = 2e^2$

La Utilidad esperada de la firma antes de adquirir al distribuidor, dependerá del tipo de distribuidor que contrate, por ello la expresión es:

$$E[\Pi] = \sum_{i=1}^{2} (p_i q_i - c_i^e) * P(D = i)$$

Ya que P(D=1) = P(D=2) = 0.5; entonces la utilidad esperada es:

$$E[\Pi] = \frac{1}{2}\left[p_1(4 + e_1 - p_1) - e^2 + p_2(4 + e_2 - p_2) - 2e^2\right]$$

b.-

Para D = 1, se tiene: $\Pi = p_1(4 + e_1 - p_1) - e^2$

CPO: $\dfrac{\partial \Pi}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow 4 + e_1 - 2p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \dfrac{4 + e_1}{2}$ (1)

$\dfrac{\partial \Pi}{\partial e_1} = 0 \Rightarrow p_1 - 2e_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 2e_1$ (2)

de (1) y (2), se tiene que $e_1 = \dfrac{4}{3}$; reemplazando en (2) $p_1 = \dfrac{8}{3}$; finalmente reemplazando en la función de demanda $q_1 = \dfrac{8}{3}$

Para D = 2, se tiene que $\Pi = p_2(4 + e_2 - p_2) - 2e^2$

CPO: La derivada c/r al precio es análoga, por ello $p_2 = \dfrac{4 + e_2}{2}$ (3)

$\dfrac{\partial \Pi}{\partial e_2} = 0 \Rightarrow p_2 - 4e_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 4e_2$ (4)

de (3) y (4), se tiene que $e_2 = \dfrac{4}{7}$; reemplazando en (4) $p_2 = \dfrac{16}{7}$; finalmente la cantidad es

$q_2 = \dfrac{16}{7}$

c.- Reemplazando los valores encontrados en la parte 2, en la ecuación de utilidad esperada de la parte 1, se tiene que:

$$E[\Pi] = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} * \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{7} * \frac{16}{7} - 2\left(\frac{4}{7}\right)^2\right) = \frac{104}{21} \approx 4{,}95$$

2)

a-. El bienestar en el segundo caso es peor que en primero, puesto que al existir un monopolio productor y uno distribuidor los márgenes que obtienen de las demandas que enfrentan son menores que en el caso integrado, es decir, el costo social es menor cuando el monopolio es integrado.

b-. El problema del distribuidor para cada uno de ellos es:

$$MAX\ \Pi_1 = (p_1 - p_{w1})(4 + e_1 - p_1) - e_1^2 \qquad (5)$$
$$MAX\ \Pi_2 = (p_2 - p_{w2})(4 + e_2 - p_2) - 2e_2^2 \qquad (6)$$

Resolviendo para 1:

CPO: $$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow 4 + e_1 - 2p_1 + p_{w1} = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{4 + e_1 + p_{w1}}{2} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial e_1} = 0 \Rightarrow p_1 - p_{w1} - 2e_1 = 0 \Rightarrow p_1 = p_{w1} + 2e_1 \qquad (8)$$

de (7) y (8); $e_1 = \dfrac{4 - p_{w1}}{3}$ (9);

reemplazando en (8) ; $p_1 = \dfrac{8 + p_{w1}}{3}$ (10)

reemplazando en la función de demanda: $q_1 = 4 + \dfrac{4 - p_{w1}}{3} - \dfrac{8 + p_{w1}}{3} = \dfrac{8 - 2p_{w1}}{3}$ (11)

en (5):

$$\Pi_1 = \left(\frac{8 + p_{w1}}{3} - p_{w1}\right)\frac{8 - 2p_{w1}}{3} - \left(\frac{4 - p_{w1}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(4 - p_{w1})^2 \qquad (12)$$

Resolviendo para 2:

CPO: $$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow p_2 = \frac{4 + e_2 + p_{w2}}{2} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial e_2} = 0 \Rightarrow p_2 - p_{w2} - 4e_2 = 0 \Rightarrow p_2 = p_{w2} + 4e_2 \qquad (14)$$

de (9) y (10); $e_2 = \dfrac{4 - p_{w2}}{7}$ (15) ;

reemplazando en (10) ; $p_2 = \dfrac{16 + 3p_{w2}}{7}$ (16)

$$q_2 = 4 + \frac{4 - p_{w2}}{7} - \frac{16 + 3p_{w2}}{7} = \frac{16 - 4p_{w2}}{7} \qquad (17)$$

en (6)

$$\Pi_2 = \left(\frac{16 + 3p_{w2}}{7} - p_{w2}\right)\frac{16 - 4p_{w2}}{7} - 2\left(\frac{4 - p_{w2}}{7}\right)^2 = \frac{2}{7}\left(4 - p_{w2}\right)^2 \qquad (18)$$

c-. Para Neumalo el problema a resolver es el siguiente:

$$\underset{\{(e_1, p_{w1}),(e_2, p_{w2})\}}{MAX} E[\Pi_N] = \frac{1}{2}\left[p_{w1}\left(4 + e_1 - p_1\right) + p_{w2}\left(4 + e_2 - p_2\right)\right]$$

s.a

$$(p_1 - p_{w1})(4 + e_1 - p_1) - e_1^2 \geq \frac{3}{2} \qquad \text{R.P para 1 (Utilidad de reserva = 3/2)}$$

(19) $$(p_2 - p_{w2})(4 + e_2 - p_2) - 2e_2^2 \geq \frac{3}{2} \qquad \text{R.P para 2}$$

(20) $$(p_1 - p_{w1})(4 + e_1 - p_1) - e_1^2 \geq (p_2 - p_{w2})(4 + e_2 - p_2) - e_2^2 \qquad \text{R.I para 1}$$

$$(p_2 - p_{w2})(4 + e_2 - p_2) - 2e_2^2 \geq (p_1 - p_{w1})(4 + e_1 - p_1) - 2e_1^2 \qquad \text{R.I para 2}$$

La restricción de participación de 1 no es activa, puesto que se deduce de la R.P para 2 y la R.I para 1.
La R.P para 2 es activa pues la distribuidora tipo 2 es aquella que enfrenta los mayores costos, así su utilidad, frente a los mismos precios mayoristas, es mas baja que las de tipo 1.
La restricción de incentivos para 1 es activa, puesto que son los distribuidores tipo 1 los que desean hacerse pasar por distribuidores de tipo 2, ya que así "declaran" costos de esfuerzo más altos y aumentan su margen de utilidad.

Problema 3

a)

$$Definimos: U = \frac{\sum \sqrt{e_i}}{n} - e$$

$$U = \frac{n * \sqrt{e}}{n} - e$$

$$U = \sqrt{e} - e$$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = \frac{1}{2\sqrt{e}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{e}$$

$$\frac{1}{4} = e$$

b)

Ahora no se conoce el esfuerzo que hace el otro

$$U_i = \frac{\sum_{j \neq i} \sqrt{e_j} + \sqrt{e_i}}{n} - e_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial e_i} = \frac{1}{2n\sqrt{e_i}} - 1 = 0$$

$$e_i = \frac{1}{4n^2}$$

c)

La ineficiencia la mostraremos como la diferencia de las suma de las utilidades para cada caso (al ser la suma, podremos encontrar una expresión en función de n)

$$U_a = \frac{n}{4}$$

$$U_b = \frac{2n-1}{4n}$$

$$U_a - U_b = \frac{n}{4} - \frac{2n-1}{4n} = \frac{n^2 - 2n + 1}{4n}$$

Vemos que cuando n tiene a infinito, la diferencia entre las utilidades totales aumenta. Es decir, aumenta la ineficiencia.