UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Economía Industrial
Semestre: Primavera 2007
Profesor: Ronald Fisher
Auxiliares: Klaus Kaempfe
Sofía Moroni
Carlos Ramírez
Diego Vega

Clase Auxiliar 2

Problema 1

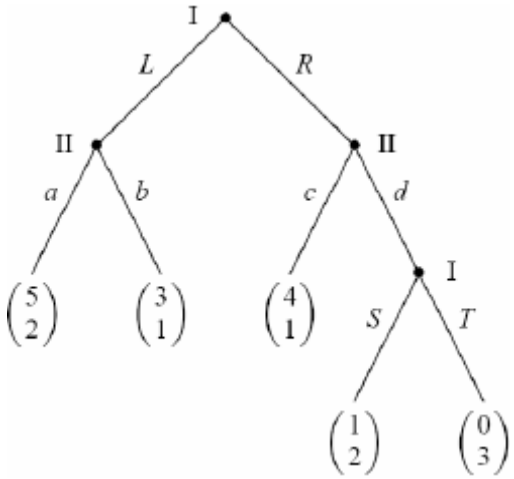
Muestre que sólo puede existir un equilibrio en estrategias dominantes.

Solución:

Sabemos que una estrategia Si* del jugador i es dominante si:
Ui (Si*, S-i) ≥ Ui (Si, S-i) ∀Si ∀S-i con desigualdad estricta para al menos algún Si
Luego, es la mejor respuesta a todas las estrategias de los demás, y es única, ya que si existieran dos estrategias dominantes Si' y Si'' se tendría que:
Ui (Si', S-i) ≥ Ui (Si, S-i) ∀Si ∀S-i con desigualdad estricta para al menos algún Si
Ui (Si'', S-i) ≥ Ui (Si, S-i) ∀Si ∀S-i con desigualdad estricta para al menos algún Si
En particular Ui (Si', S-i) ≥ Ui (Si'', S-i) ∀S-i
Ui (Si', S-i) ≤ Ui (Si'', S-i) ∀S-i
Por lo que la estrategia dominante necesariamente es única (Si' = Si'') ya que de otra manera se viola la condición de desigualdad en la definición de estrategia dominante.
→ Equilibrio en estrategias dominantes es único.

Problema 2 (Estrategias Reducidas)

Considere el siguiente árbol. Entre paréntesis, los pagos superiores son los del jugador I y los inferiores los del jugador II.



(a) ¿Cuál es el número de estrategias para el jugador I y para el jugador II?, ¿Cuántas estrategias reducidas posee cada jugador?
(b) Dibuje el juego en forma normal en estrategias reducidas.
(c) ¿Cuales son los equilibrios de *Nash* del juego?
(d) Identifique todos los pares de estrategias reducidas donde exista una estrategia que domine débil o estrictamente a la otra.

Solución:

(a) El jugador I tiene 2×2 = 4 estrategias puras, y el jugador II tiene 2×2 = 4 estrategias puras. El numero de estrategias puras reducidas para el jugador I es 3, y 4 (no existe reducción posible) para el jugador II.

(b) Las mejores respuestas están encerradas en un cuadro:

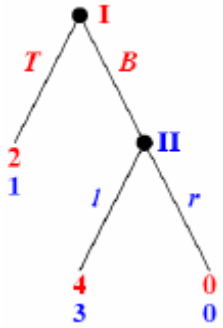
I \ II	*ac*	*ad*	*bc*	*bd*
L∗	[2] [5]	[2] [5]	1 3	1 [3]
RS	1 4	[2] 1	1 [4]	[2] 1
RT	1 4	[3] 0	1 [4]	[3] 0

(c) Los equilibrios de Nash en estrategias reducidas son (*L¤*,*ac*), (*L¤*,*ad*). Ahora, utilizando *backward induction*, el único subjuego perfecto del juego es (*L¤*,*ad*).

(d) Para el jugador I, RS domina débilmente a RT. Para el jugador II, *ac* domina débilmente a la estrategia *bc*, *ad* domina débilmente a la estrategia *ac*, *ad* domina estrictamente a la estrategia *bc*, *ad* domina débilmente a la estrategia *bd*, *bd* domina débilmente a la estrategia *bc*.

Problema 3 (Equilibrio Perfecto en el Subjuego)

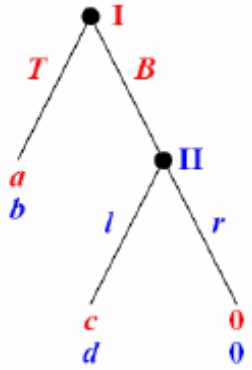
(a) Para el siguiente árbol, encuentre todos los equilibrios de *Nash* (en estrategias puras). ¿Cuáles de ellos es equilibrio en subjuego perfecto?



(b) En el siguiente árbol, los pagos a, b, c, d pertenecen a R_+.

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Economía Industrial
Semestre: Primavera 2007
Profesor: Ronald Fisher
Auxiliares: Klaus Kaempfe
Sofía Moroni
Carlos Ramírez
Diego Vega



Para cada una de las siguientes afirmaciones *(i), (ii), (iii),* indique si es verdadero o falso, justificando su respuesta con un buen argumento o un contraejemplo; puedes utilizar cualquier resultado ya conocido. Recordar que $a,b,c,d > 0$.

(i) …"el juego siempre tendrá un equilibrio de *Nash* subjuego perfecto (SPNE)"…

(ii) …"el pago para el jugador II en cualquier SPNE será siempre al menos tan alto como el pago que obtendría en cualquier equilibrio de *Nash* del juego"…

(iii) …"el pago para el jugador I en cualquier SPNE será siempre al menos tan alto como el pago que obtendría en cualquier equilibrio de *Nash* del juego"…

Solución:

(a) El juego en forma Normal queda:

I \ II	l	r
T	$\boxed{1}$ 2	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
B	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$	0 0

El juego posee solo dos equilibrios en estrategias puras (T, r) y (B, l). El equilibrio (B, l) es obtenido por backward induction y por lo tanto es el único equilibrio perfecto en el subjuego (SPNE).

(b)

(i) Verdadero, dado que en todo juego expresado como árbol y con información completa es posible obtener un SPNE vía backward induction.

(ii) Falso, por ejemplo reemplazando el pago de 1 por 4 de la figura de la parte *(a)*, se logra el equilibrio de Nash (T, r) con un pago mayor para el jugador II

(iii) Verdadero: si $a > c$, entonces T domina estrictamente a B, y T siempre es jugado por el jugador I en equilibrio por lo cual el obtiene el pago de a, el cual es también el pago de SPNE cuando el jugador II juega l (y el jugador I juega T). Si $a=c$, entonces el jugador I también consigue a en cualquier equilibrio, y si $a < c$, entonces el único SPNE es (B, l) con un pago de c al jugador I, el cual

es el mas alto pago para el jugador I en el juego, y por lo tanto al menos tan alto como cualquier pago de un equilibrio de Nash.

PROBLEMA 4

Un monopolio natural es una industria en que las condiciones tecnológicas o de demanda son tales que es eficiente que solo produzca una firma. Una industria se puede transformar en un monopolio natural por una caída violenta de la demanda. Por ejemplo, cuando terminó la guerra fría la demanda por armamentos cayó y varias firmas salieron del mercado. En esta pregunta se le pide examinar que determina cual firma sale del mercado cuando una industria es monopolio natural, pero inicialmente hay más de una empresa en el mercado.

Considere un duopolio que permanecerá por dos años más y que cada firma pierde C por año. Si una de las firmas saliera del mercado, entonces la restante tendría ingresos iguales a π por período por lo que quede de los dos años. Cada firma puede elegir cuando salir: ahora (t=0), en un año más (t=1) o en dos años (t=2).

(a) Escriba el juego en forma normal.
(b) Encuentre el (o los) equilibrio (s) de Nash en estrategias puras. Si una firma decide salir, ¿en qué momento lo hace en equilibrio?

Solución:

(a) Jugadores: Firma 1 y Firma 2.
Acciones: Salir en t=0, t=1, t=2
Las utilidades se describen en la siguiente matriz de pagos:

		Firma 2		
		t=0	t=1	t=2
Firma 1	t=0	**0** **0**	Π **0**	2Π **0**
	t=1	**0** Π	**-C** **-C**	Π**-C** **-C**
	t=2	**0** 2Π	**-C** Π**-C**	**-2C** **-2C**

donde $\Pi=\pi$-c

Se considera que el juego comienza al inicio del período 0, por lo que al final del período 0 o al inicio del período 1, una firma puede ganar 0 (si se retira al inicio), perder C si continua y la firma 2 también continua, o ganar Π si continua y la otra se retira.

(b) Los Equilibrios de Nash en estrategias puras son:
EN1 = (Salir en t=0, Salir en t=2)
EN2 = (Salir en t=2, Salir en t=0)
Esto es, si una firma decide salir lo hace en el primer período o se queda hasta el final (t=2).

UNIVERSIDAD DE CHILE
FAC. DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Economía Industrial
Semestre: Primavera 2007
Profesor: Ronald Fisher
Auxiliares: Klaus Kaempfe
Sofía Moroni
Carlos Ramírez
Diego Vega

Problema 5 (Más estrategias Mixtas)

Sea el siguiente juego.

$$\begin{pmatrix} (1,6) & (0,a) & (1,2) \\ (0,2) & (1,a) & (0,6) \end{pmatrix}$$

Encuentre para a =3,4,5,6 todas los equilibrios de Nash en estrategias mixtas del siguiente Juego, en donde el jugador juega en las filas y obtiene como pago la primera componente de cada par de pagos

Solución:

Sea q la probabilidad que el jugador 1 juegue la primera fila. Luego veamos si es factible cada una de las posibles jugadas del jugador 2:

Para a=3. El juego queda:

$$\begin{pmatrix} (1,6) & (0,3) & (1,2) \\ (0,2) & (1,3) & (0,6) \end{pmatrix}$$

Los equilibrios en estrategias puras serán: ((1,0),(1,0,0))

Si σ 1= (q,1-q) → El jugador 2 jugara

(i1). σ 2=(p,1-p,0) ssi 6q+2(1-q) = 3 → q=1/4. Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1p=1(1-p) →p=1/2…lo cual es posible (OK).

(i2). σ 2=(p,0,1-p) ssi 6q+2(1-q) = 2q+6(1-q) → q=1/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1=0 → lo cual no es posible (X).

(i3). σ 2=(0,p,1-p) ssi 3 = 2q+6(1-q) → q=3/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1-p=p →p=1/2 lo cual es posible (OK).

(i4). σ 2=(p,r,1-p-r) ssi 6q+2(1-q) = 3 y 3 = 2q+6(1-q)→ q=3/4 y q=1/4 . →←

Finalmente los NE serán ((1,0),(1,0,0)); ((1/4,3/4),(1/2,1/2,0)); ((3/4,1/4),(0,1/2,1/2))

Para a=4. El juego queda:

$$\begin{pmatrix} (1,6) & (0,4) & (1,2) \\ (0,2) & (1,4) & (0,6) \end{pmatrix}$$

Los equilibrios en estrategias puras serán: ((1,0),(1,0,0))

Si σ 1= (q,1-q) → El jugador 2 jugara

(i1). σ 2=(p,1-p,0) ssi 6q+2(1-q) = 4 → q=1/2. Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1p=1(1-p) →p=1/2…lo cual es posible (OK).

(i2). σ 2=(p,0,1-p) ssi 6q+2(1-q) = 2q+6(1-q) → q=1/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1=0 → lo cual no es posible (X).

(i3). σ 2=(0,p,1-p) ssi 4 = 2q+6(1-q) → q=1/2 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1-p=p →p=1/2 lo cual es posible (OK).

(i4). σ 2=(p,r,1-p-r) ssi 6q+2(1-q) = 4 y 4 = 2q+6(1-q)→ q=1/2 y q=1/4 . →←

Finalmente los NE seran ((1,0),(1,0,0)); ((1/2,1/2),(1/2,1/2,0)); ((1/2,1/2),(0,1/2,1/2))

Para a=5. El juego queda:

$$\begin{pmatrix} (1,6) & (0,5) & (1,2) \\ (0,2) & (1,5) & (0,6) \end{pmatrix}$$

Los equilibrios en estrategias puras serán: ((1,0),(1,0,0))

Si σ 1= (q,1-q) → El jugador 2 jugara

(i1). σ 2=(p,1-p,0) ssi 6q+2(1-q) = 5 → q=3/4. Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1p=1(1-p) →p=1/2…lo cual es posible (OK).

(i2). σ 2=(p,0,1-p) ssi 6q+2(1-q) = 2q+6(1-q) → q=1/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1=0 → lo cual no es posible (X).

(i3). σ 2=(0,p,1-p) ssi 5 = 2q+6(1-q) → q=1/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1-p=p →p=1/2 lo cual es posible (OK).

(i4). σ 2=(p,r,1-p-r) ssi 6q+2(1-q) = 5 y 5 = 2q+6(1-q)→ q=1/2 y q=1/4 . →←

Finalmente los NE serán ((1,0),(1,0,0)); ((3/4,1/4),(1/2,1/2,0)); ((1/4,3/4),(0,1/2,1/2))

Para a=6. El juego queda:

$$\begin{pmatrix} (1,6) & (0,6) & (1,2) \\ (0,2) & (1,6) & (0,6) \end{pmatrix}$$

Los equilibrios en estrategias puras serán: ((1,0),(1,0,0)) y ((0,1),(0,1,0))

Si σ 1= (q,1-q) → El jugador 2 jugara

(i1). σ 2=(p,1-p,0) ssi 6q+2(1-q) = 6 → q=1. Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1p>=1(1-p) →p>=1/2…lo cual es posible (OK).

(i2). σ 2=(p,0,1-p) ssi 6q+2(1-q) = 2q+6(1-q) → q=1/4 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1=0 → lo cual no es posible (X).

(i3). σ 2=(0,p,1-p) ssi 6 = 2q+6(1-q) → q=0 . Ahora el jugador 1 jugara σ 1 ssi 1-p<=p →p>=1/2 lo cual es posible (OK).

(i4). σ 2=(p,r,1-p-r) ssi 6q+2(1-q) = 6 y 6 = 2q+6(1-q)→ q=1 y q=0 . →←

Finalmente los NE seran ((1,0),(1,0,0)); (0,1),(0,1,0)); ((1,0),(s,1-s,0)); ((0,1),(0,s,1-s)) donde s>=1/2