Pauta Control 1

Problema 1

1. En la Figura 1 es posible apreciar que la ponderación 3 ($1/3 \cdot N1 + 2/3 \cdot N2$) es la que maximiza la media esperada del control.

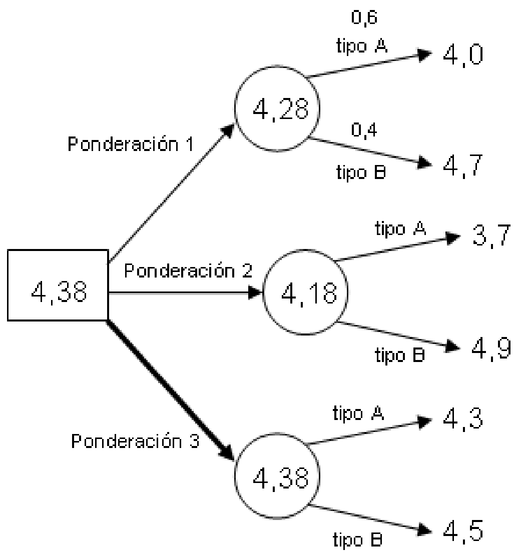

Figura 1: Arbol problema 1.1

2. En este caso se debe separar entre hacer o no el ejercicio y que la media en éste sea azul o rojo. Además se necesitará caclular ciertas probabilidades. Sean:

$$\begin{aligned} Azul &= \text{Media en el ejercicio es azul.} \\ Rojo &= \text{Media en el ejercicio es rojo.} \\ A &= \text{Alumnos tipo A.} \\ B &= \text{Alumnos tipo B.} \end{aligned}$$

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{array}{lcl lcl} P[A] &=& 0{,}6 & P[B] &=& 0{,}4 \\ P[Azul|A] &=& 0{,}14 & P[Rojo|A] &=& 0{,}86 \\ P[Azul|B] &=& 0{,}42 & P[Rojo|B] &=& 0{,}58 \end{array}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[Azul] = P[Azul|A] \cdot P[A] + P[Azul|B] \cdot P[B] = 0{,}252 = 1 - P[Rojo]$$

$$P[Rojo] = 0{,}748$$

Por otro lado tendremos que:

$$P[A|Azul] = \frac{P[Azul|A] \cdot P[A]}{P[Azul]} = \frac{1}{3} = 1 - P[B|Azul]$$

$$P[B|Azul] = \frac{2}{3}$$

$$P[A|Rojo] = \frac{P[Rojo|A] \cdot P[A]}{P[Rojo]} = 0{,}69 = 1 - P[B|Rojo]$$

$$P[B|Rojo] = 0{,}31$$

El árbol resultante, en el cual se utilizan estas probabilidades, se muestra en la Figura 2.

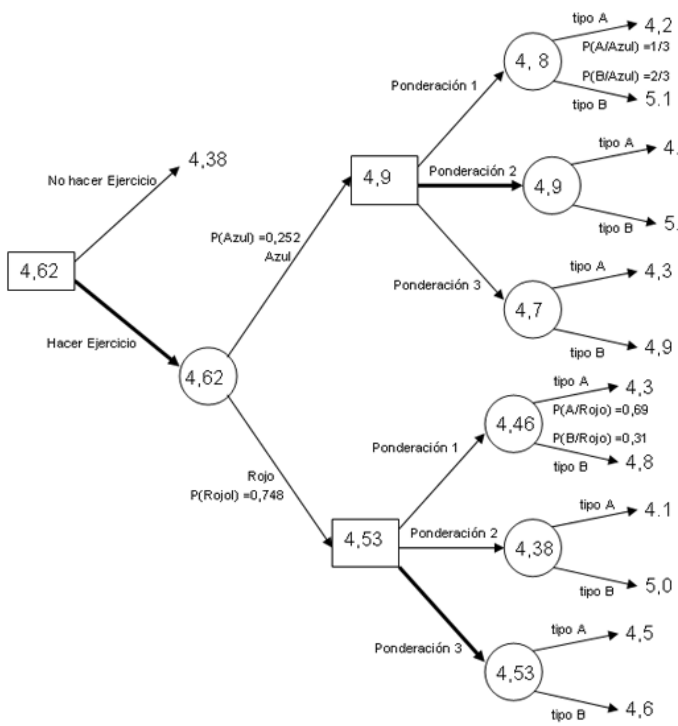

Figura 2: Arbol problema 1.2

En conclusión, si el ejercicio obtiene una media azul, se debe elegir la ponderación 2 ($2/3 \cdot N1 + 1/3 \cdot N2$), mientras que si la media es un rojo la ponderación que maximiza la media ponderada del control es la tercera ($1/3 \cdot N1 + 2/3 \cdot N2$). Además, claramente conviene tomar el ejercicio ya que con éste la media ponderada del control sube más de dos décimas. De esta forma se puede decir que la poneración óptima cambia sólo en el caso que la media en el ejercicio sea azul, ya que de lo contrario conviene aplicar la misma ponderación que en la parte 1.

Problema 2

1. En el intento de conquista cualquiera i habrán S_i hombres en el ejército en ese momento. Luego la probabilidad de que un hombre caiga en combate dada esa cantidad de hombres es r_{S_i}. De esta

forma, la probabilidad pedida es:

$$C_i(n)\text{=P[Caigan } n \text{ hombres]=}\binom{S_i}{n}\ r_{S_i}^n \cdot (1-r_{S_i})^{S_i-n}$$

2. Si hay S_i hombres en el intento de conquista i y mueren C_i en batalla, luego la probabilidad que mueran n por causa del *frío* es:

$$F_i(n)\text{=P[Caigan } n \text{ hombres por causa del } \textit{frío} \mid S_i,\, C_i\text{]=}\binom{S_i-C_i}{n}\ (t_{S_i-C_i})^n \cdot (1-t_{S_i-C_i})^{S_i-C_i-n}$$

3. En primer lugar definimos las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} c_i &= \text{Número de muertos caídos en acción en el intento de conquista i} \\ f_i &= \text{Número de muertos por frío en el intento de conquista i} \end{aligned}$$

Siempre considerando que hay S_i hombres en el intento de conquista i, las dos probabilidades calculadas anteriormente corresponden a las funciones de densidad de probabilidad de estas dos variables aleatorias discretas, es decir:

$$\text{P}[c_i = n]\text{=}\ C_i(n)$$
$$\text{P}[f_i = n]\text{=}\ F_i(n)$$

Luego, el valor esperado del total de muertos será:

$$E(Muertos)\text{=}M_{S_i}\text{=}E(c_i+f_i)\text{=}\sum_{n=0}^{\S_i} E(c_i+f_i/c_i=n)\cdot P(c_i=n)$$

Aplicando Probabilidades Totales y considerando que a lo más pueden morir el número de hombres en el ejército durante el intento de conquista i (es decir, S_i)

Así,

$$\begin{aligned} E(Muertos) &= \sum_{n=0}^{S_i} E(n+f_i)\cdot P(c_i=n) = \sum_{n=0}^{S_i} E(n+f_i)\cdot \binom{S_i}{n} r_{S_i}^n \cdot (1-r_{S_i})^{S_i-n} \\ &= \sum_{n=0}^{S_i} [(\sum_{j=0}^{S_i-n}(j+n)\cdot F_i(j))\cdot \binom{S_i}{n} r_{S_i}^n \cdot (1-r_{S_i})^{S_i-n} \\ &= \sum_{n=0}^{S_i} \big[(\sum_{j=0}^{S_i-n}(j+n)\cdot \binom{S_i-n}{j}(t_{S_i-n})^j\cdot(1-t_{S_i-n})^{S_i-n-j}\big]\cdot \binom{S_i}{n} r_{S_i}^n \cdot (1-r_{S_i})^{S_i-n} \end{aligned}$$

4. Para modelar adecuadamente este problema se escogerán como etapas los distintos intentos de conquista que puede realizar el general. El número de intentos será igual al número de países que haya.

- **Etapas**:

  $i = 1, ..., K$. Cada uno de los intentos de conquista del ejército. En la etapa i puede intentar conquistar cualquiera de los K países.

- **Estados**:

S_i= Número de hombres en el ejército antes de las batallas del intento de conquista i.

T_i= total de refuerzos pedidos hasta antes de la etapa i.

$H_i \in M_{(2\times K)}$, donde:

$$H_i(k,1) = \begin{cases} 1 & \text{Si ya conquisté el país } k \text{ n antes de realizar el intento } i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$H_i(k,2) = \begin{cases} 1 & \text{Si ya visité el país } k \text{ n antes de realizar el intento } i \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Notar que $H_i(\cdot,1)$ y $H_i(\cdot,2)$ son vectores de K dimensiones. Uno registra si se conquistó o no el país k y el otro si éste fue visitado. También es posible considerar la información contenida en estos vectores como conjuntos que contengan las ciudades visitidas y las conquistadas. La información de las ciudades conquistadas se usará en la probabilidad asociada a conquistar un determinado país, mientras que la información de las ciudades visitadas será utilizada para no volver a pasar por ellas.

- **Decisiones**:

X_i= País a conquistar en el intento de conquista i.

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{Se intenta conquistar país 1,} \\ 2 & \text{Se intenta conquistar país 2,} \\ \vdots & \\ \text{K} & \text{Se intenta conquistar país K.} \end{cases}$$

R_i= Refuerzos a pedir al inicio del intento de conquista i. Estarán disponibles en el intento $i+1$.

- **Variables Aleatorias**:

$$G_k = \begin{cases} 1 & \text{Se logra conquistar al país } k. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde, $\mathrm{P}(G_{X_i}) = P_{X_i}(H_i(\cdot,1), S_i)$, es decir, la probabilidad de conquistar el país X_i dependerá de los países que hayan sido conquistados a ese momento, del número de hombres en el ejército y del mismo país X_i.

También necesitaremos las dos variables aleatorias definidas en las parte 3, junto a sus probabilidades. Esto es:

$$\begin{aligned} c_i &= \text{Número de muertos caídos en acción en el intento de conquista i} \\ f_i &= \text{Número de muertos por frío en el intento de conquista i} \end{aligned}$$

Donde,

$$\mathrm{P}[c_i = n] = C_i(n)$$
$$\mathrm{P}[f_i = n] = F_i(n)$$

- **Función de Recursión**:

$$S_{i+1} = S_i - c_i - f_i + R_i$$

$$T_{i+1} = T_i + R_i$$

$$H_{i+1}(\cdot,1) = H_i(\cdot,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_{X_i} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow X_i\text{-ésima posición}$$

$$H_{i+1}(\cdot,2) = H_i(\cdot,2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow X_i\text{-ésima posición}$$

- **Función de Beneficios**:

$$V_i(S_i, T_i, H_i, X_i, R_i,) = E(U_i) + E(V^{\star}_{i+1}(S_{i+1}, T_{i+1}, H_{i+1}))$$

donde,

$$U_i = -NS \cdot R_i - MU \cdot (f_i + c_i) - SB \cdot S_i - BP \cdot (1 - G_{X_i}) + BG \cdot G_{X_i}$$

y,

$$V^{\star}_i(S_i, T_i, H_i) = \max_{X_i, R_i} \Big\{ V_i(S_i, T_i, H_i, X_i, R_i,) \Big\}$$

$$s.a.\ X_i \neq k \cdot H_i(k,2)\ \forall k$$

$$T_i + R_i \leq M$$

En lo anterior, se debe notar que los valores esperados son con respecto a todas las variables aleatorias involucradas en dichas expresiones.

Además, tenemos que:

$$V^{\star}_{i+1}(S_{i+1}, T_{i+1}, H_{i+1}) = V^{\star}_{i+1}(S_i - c_i - f_i + R_i, T_i + R_i, H_{i+1})$$

Esto quiere decir, que las funciones de recursion están implícitas en la(s) función(es) de beneficio(s).

Es decir, U_i son las utilidades que ocurrirán en el intento de conquista i y $V^{\star}_i$ el valor de la función objetivo en la etapa i.

De esta forma podemos obtener el valor de $E(U_i)$ y $E(V^{\star}_{i+1}(S_{i+1}, T_{i+1}, H_{i+1}))$, para poder dejar bien definida la función de beneficios. Entonces:

$$
\begin{aligned}
E(U_i) &= -NS \cdot R_i - MU \cdot E(Muertos) - SB \cdot S_i - BP \cdot (1 - P_{X_i}(H_i(\cdot, 1), S_i)) \\
&\quad +BG \cdot P_{X_i}(H_i(\cdot, 1), S_i)
\end{aligned}
$$

y

$$
E(V^\star_{i+1}(S_{i+1}, T_{i+1}, H_{i+1})) = \sum_{n=0}^{S_i} \sum_{j=0}^{S_i - n} V^\star_{i+1}(S_i - j - n + R_i, T_{i+1}, H_{i+1}) \cdot P(f_i = j) \cdot P(c_i = n)
$$

Nota: $E(Muertos)$ es lo mismo que M_{S_i}.

- **Condiciones de Borde**:

  $S_1 = S$
  $T_1 = 0$
  $H_1(i, j) = 0, \forall i, j$
  $V^\star_{K+1}(S_{K+1}, T_{K+1}, H_{K+1}) = 0$

Problema 3

1. El diagrama es el siguiente:

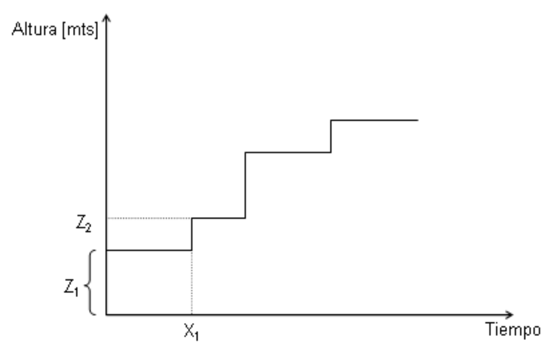

Figura 3: Diagrama problema 3.1

Dado que se inicia el ascenso inmediatamente en el instante 0, la probabilidad de estar a más de x metros es la probabilidad que una variable exponencial de parámetro λ sea mayor a x, es decir $e^{-\lambda x}$. El número de picotazos necesarios par sobrepasar los x metros es $\lambda \cdot x + 1$.

2. Utilizando las llegadas condicionales de un proceso de Poisson vemos que la probabilidad de haber descansado es

$$P_{DESCANSO} = \frac{3}{4}$$

Con un dibujo quedaría más claro o quizás calculando la probabilidad de no haber descansado.

3. Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre el numero de picotazos que se han realizados hasta el instante t. Notamos que en el instante 0 se realiza inmediatamente un picotazo (el andinista no parte descansando).

   Sea $Z(t)$ la altura alcanzada en el instante t y $N(t)+1$ el número de picotazos dados hasta el instante t.

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[Z(t)|N(t)=n] \cdot \frac{e^{-\gamma t} \cdot (\gamma t)^n}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+1} E[Z_i] \cdot \frac{e^{-\gamma t} \cdot (\gamma t)^n}{(n)!} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{e^{-\gamma t} \cdot (\gamma t)^n}{(n)!} \\ &= \frac{1}{\lambda}(\gamma t + 1) \end{aligned}$$

4. Condicionemos ahora sobre el numero de picotazos necesarios para superar los x metros de altura.

   Sea Y(x) el numero de picotazos realizados justo antes de sobrepasar los x metros de altura. Es fácil ver que $Y(x)$ se distribuye poisson de parámetro $\lambda \cdot x$. Sea $T(x)$ el tiempo necesario para superar la barrera de los x metros de altura.

$$\begin{aligned} E[T(x)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[T(x)|Y(x)=n] \cdot \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^n}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{n+1} E[X_i] \cdot \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^n}{(n)!} \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^n}{(n)!} \\ &= \frac{1}{\gamma}(\lambda x) \end{aligned}$$

5. Reemplazando vemos que se demoraría $\frac{1}{\gamma} + t$. Dado que tengo que superar la altura alcanzada en t necesito una exponencial de descanso antes de superar esa altura. El resultado entonces resulta obvio.

6. El proceso de llegadas de picotazos fallidos es poisson de tasa $p \cdot \gamma$. Entonces el número esperado de picotazos fallidos es $p \cdot \gamma t + p$. El término p corresponde a la posibilidad de que el primer picotazo resulta fallido.