DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2004
Prof: P. Rey, R. Epstein, D. Sauré.

Control 1

Problema 1

El equipo docente de un ramo, preocupado por el resultado del próximo proceso de evaluación docente, está considerando los pesos relativos que asignará a las dos preguntas (P1 y P2) de un control que está elaborando. Las opciones a considerar son:

- Dar a cada pregunta el mismo peso, o sea calcular la nota final como $1/2 \cdot \mathrm{N1} + 1/2 \cdot \mathrm{N2}$, donde N1 y N2, son las notas en las preguntas P1 y P2, respectivamente;
- Dar a la pregunta P1 el doble de peso que a la pregunta P2, es decir, calcular la nota final como $2/3 \cdot \mathrm{N1} + 1/3 \cdot \mathrm{N2}$;
- Dar a la pregunta P1 la mitad de peso que a la pregunta P2, es decir, calcular la nota final como $1/3 \cdot \mathrm{N1} + 2/3 \cdot \mathrm{N2}$.

Se sabe que el promedio alcanzado por los alumnos en el ramo tiene influencia directa en la evaluación que los profesores reciben. Por este motivo, el cuerpo docente busca aquella ponderación que maximice el el promedio de notas esperado en el control.

De acuerdo a datos históricos, se ha determinado que las diversas variaciones que puede presentar el grupo de alumnos que toma el curso durante un semestre puede ser, para los fines de este análisis, representado por dos comportamientos tipo que llamaremos “grupo tipo A” y “grupo tipo B”. Se estima, que sin más información disponible, un determinado grupo es de “tipo A” en el 60 % de los casos y de “tipo B”, el 40 % restante.

Además, se estima que un grupo “tipo A” obtendrá una media 3,1 en la pregunta P1 y una media 4,9 en la pregunta P2. Por otro lado, se espera que un grupo “tipo B” obtenga medias 5,3 en P1 y 4,1 en la P2.

1. (2,0 ptos.) Utilizando la técnica de “árboles de decisión” encuentre cúal de las tres ponderaciones en estudio maximiza la media esperada en el control.

El equipo docente preocupado con la incertidumbre sobre los alumnos del curso y con la preparación que éstos tendrán para el control, está estudiando también la posibilidad de aplicar un “Ejercicio” previo al control. Por lo sucedido en otros semestres, se sabe que el tomar un “Ejercicio”, ayuda a los estudiantes a prepararse para el control y además aporta cierta información sobre el grupo de alumnos. En particular, se sabe que la probabilidad que el Ejercicio resulte con nota azul, si el grupo es tipo A es de 14 %; mientras que la probabilidad el Ejercicio resulte con nota azul, si el grupo es tipo B es de 42 %.

Además, se sabe que, en caso de aplicar el “Ejercicio”, las medias de las notas en las preguntas del control se comportarán de la manera descrita en la siguiente tabla:

	Grupo tipo A		Grupo tipo B	
Media Ejercicio	P1	P2	P1	P2
Azul	3,9	4,5	5,7	4,5
Rojo	3,7	4,9	5,4	4,2

Dado que tomar un ejercicio requiere cierto esfuerzo por parte del equipo docente, no es una decisión obvia el hacerlo o no. Luego de algunas conversaciones entre profesores de cátedra y auxiliares, se llegó al consenso que sólo valdría la pena, si tomarlo resultara en un aumento de la media esperada de al menos 0,2 puntos.

2. (4,0 ptos.) Considerando estos antecedentes y aplicando la técnica de “árboles de decisión”, evalúe si en este caso vale la pena o no tomar el ejercicio. Analice también, si en caso de tomarlo, la ponderación “óptima” cambia o no.

Problema 2

En un lejano país de Asia la tensión con sus vecinos ha llegado al límite y se ha desatado una cruenta guerra. El presidente de dicho país, ha encomendado al *General Mao Tse Yung*, un despiadado estratega, la tarea de idear un plan para conquistar a sus países vecinos. Para ello a conformado el llamado *Ejército Conquistador* que tendrá como misión liderar la conquista de sus odiados vecinos, teniendo que decidir el orden en que intenta conquistar a cada uno de los K países colindantes (no existiendo un orden predeterminado para ello y pudiendo intentar conquistar a cada país sólo una vez).

El *Ejército Conquistador* constará inicialmente de S hombres, y antes de cada intento de conquista el general *Mao Tse Yung* puede solicitar refuerzos al regimiento central, los cuales se integrarán al ejército a contar de la próxima conquista que se emprenda en el plan. Sin embargo, podrá pedir como máximo M hombres en total, que corresponden a las reservas que quedan en el país.

Después de cada intento de conquista, el *Ejército Conquistador* podrá efectivamente haber conquistado al país k o haber sucumbido ante su férrea resistencia. El resultado del intento de conquista en dos países cualesquiera, son v.a. dependientes en probabilidad: La probabilidad de conquistar al país k, dependerá de los países conquistados hasta ese momento, ya que esto afectará la moral del *Ejército Conquistador*. Así, por ejemplo, la probabilidad de efectivamente conquistar un país aumentará a medida que se hayan conquistado más países a lo largo de la campaña del *Ejército Conquistador*. Además, esta probabilidad también dependerá del número de hombres que tenga el ejército, siendo más probable triunfar a medida que se cuente con más hombres (en otras palabras, P[*conquistar el país* k]=P_k(*Países conquistados anteriormente, Número de hombres del ejército*)).

A su vez, la probabilidad de que un hombre del *Ejército Conquistador* muera en las batallas, es decir, haya *caído en acción* en algn intento de conquista, dado que hay n hombres en el ejército en dicho intento de conquista es r_n ($r_n < 1\ \forall n$), decreciente en n, ya que será menos probable que un hombre muera si hay más hombres en el ejército. Además, después que las batallas del intento de conquista han finalizado, el *Ejército Conquistador* deberá replegarse en los cerros del país invadido y existe una probabilidad t_s de que muera un hombre por *frío* de entre los s sobrevivientes en cada intento de conquista.

Finalmente, los asesores le han entregado a *Mao Tse Yung* estimaciones de los costos y beneficios involucrados, de modo que pueda tomar mejores decisiones. De esta forma, el costo de cada refuerzo es NS [u.m.]. El costo por cada muerte, por conceptos de ataúd y transporte, es de MU [u.m.].Cada soldado en batalla tiene un costo de SB [u.m.] por cada intento de conquista en el cual participa. El perder un intento de conquista, es decir haber intentado conquistar y no haberlo logrado tiene un costo de BP [u.m.] mientras que el beneficio por lograr efectivamente conquistar un país es BG [u.m] provenientes de los saqueos que se hacen después de la victoria.

1. (0.5 Ptos.) Encuentre la probabilidad de que hayan n *caídos en acción* en el ejército en un intento de conquista cualquiera i, considerando que en ese momento hay S_i hombres. Llame a esta probabilidad $C_i(n)$.
2. (0.5 Ptos.) Encuentre la probabilidad de que hayan n muertos por *frío* en un intento de conquista cualquiera i, considerando que en ese intento de conquista hubo S_i hombres iniciales y C_i caídos en comabte . Llame a esta probabilidad $F_i(n)$.
3. (1 Pto.) Calcule el valor esperado del número de muertos en un intento de conquista i (muertos por *frío* y *caídos en acción*) dado que partieron S_i a ese intento de conquista. Llame a este valor esperado M_{S_i}.
4. (4 Ptos.) Formule un modelo de programación dinámica que permita a *Mao Tse Yung* decidir el plan de conquista de su *Ejército Conquistador* de manera de maximizar el valor esperado de las utilidades. Hint: Puede utilizar las probabilidades pedidas en las partes anteriores.

Problema 3

Un experimentado andinista se encuentra en las faldas de un risco de H [mts] de altura. Antes de comenzar el peligroso ascenso, el deportista analiza cual es la dinámica que regirá la hazaña. El andinista cuenta con una única picota, la que utilizará para ganar gradualmente altura. La distancia entre dos picotazos sucesivos, digamos el picotazo $(i-1)$ y el i puede ser modelado por una variable aleatoria Z_i de distribución exponencial de parámetro λ.

Una vez que la picota ha sido clavada en una altura especifica, el andinista haciendo uso de toda su fuerza, realiza un ascenso instantáneo hasta dicha altura. El esfuerzo necesario para realizar esta acción lo deja agotado, por lo que se debe tomar algunos segundos para descansar. Independiente de la distancia entre los picotazos i y el $(i+1)$ el tiempo que el andinista dedica a descansar antes de seguir subiendo se puede modelar como una variable aleatoria X_i de distribución exponencial de parámetro γ.

Suponiendo que la altura H es muy grande y que el andinista no parte descansando, conteste:

1. (1,0 ptos.) Realice un diagrama que represente la trayectoria temporal del andinista. Durante los primeros segundos de su ascenso, ¿cuál es la probabilidad que el andinista se encuentre a más de x metros de altura? ¿Cuál es el número esperado de picotazos necesarios para escalar x metros de altura?
2. (1,0 ptos.) Suponiendo que el andinista supero los 10 metros al tercer 3 picotazo, ¿cuál es la probabilidad que haya descansado antes de sobrepasar los 5 metros de altura?
3. (1,5 ptos.) Sea A_t la distancia alcanzada por el andinista en el instante t. Encuentre una expresión para $E[A_t]$
4. (1,5 ptos.) Sea T_x el tiempo que demorará el andinista en superar los x metros de altura. Encuentre una expresión para $E[T_x]$.
5. (1,0 ptos.) ¿Cuál es el tiempo esperado que el andinista demora en superar la altura esperada que alcanzaría en t minutos? ¿Le parece lógico? Interprete el resultado.

Suponga ahora que cada vez que el andinista clava la pica en la roca existe una probabilidad p de que caiga al suelo. Suponga que independiente de si cae o no el andinista se tomara el tiempo de descanso antes de intentar seguir escalando.

6. (1,0 ptos.) ¿Cuál es el número esperado de caídas del andinista hasta el instante t (suponga que si está en el suelo y la pica no se agarra de la roca cuenta como una caída).