Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Control 1
2 de Septiembre de 2005

Problema 1

Un laboratorio farmacéutico está trabajando en la cura para una enfermedad, por ahora, sin tratamiento. Se ha probado varios compuestos y se ha encontrado dos potencialmente útiles, los compuestos A y E. En esta etapa de pruebas se quiere seleccionar uno de los dos compuestos.

Por las pruebas preliminares, se estima que la probabilidad de que A resulte útil es del 80 %, mientras que la probabilidad de que E resulte útil es del 50 %. Los costos por realizar las pruebas finales con el compuesto A ascienden a 100 millones, mientras que las pruebas para el producto E, costarían 40 millones.

La idea del laboratorio es probar primero con un compuesto y si resulta ser útil se pasa a la fase de producción. Si el compuesto evaluado resulta no ser útil, entonces se prueba con el otro.

1. (2.0 pts) Construya y resuelva un árbol de decisiones que permita determinar por cuál compuesto comenzar la fase de pruebas, minimizando el costo esperado para el laboratorio.

Adicionalmente, el laboratorio cuenta con la alternativa de solicitar a un centro de estudios especializado, una prueba de la eficiencia del compuesto E en castores. El comportamiento de las drogas en castores no es el mismo que en humanos, pero los resultados en este tipo de pruebas pueden dar más información sobre la eficacia de los compuestos.
En este tipo de investigación, se sabe que el 80 % de los casos, una droga efectiva en humanos es efectiva en las pruebas con castores, mientras que si la droga no tiene efecto en humanos, tampoco tiene efectos en el 60 % de los casos que se prueba con castores.

2. (4.0 pts) Construya y resuelva un árbol de decisiones que permita determinar cuál es el máximo valor que estaría dispuesto a pagar el laboratorio por la prueba del compuesto E en castores.

Problema 2

1. (1.0 pts) Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. continuas i.i.d de densidad f. Sea $Y_{(i)}$ el i-ésimo menor valor de estas v.a. Encuentre la densidad de $Y_{(i)}$.
2. (1.0 pts) Encuentre la distribución de $Y_{(i+1)}$ condicional en el valor que toma $Y_{(i)}$, $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Considere que la demanda por atención que enfrenta un médico en su consulta es de 4 pacientes por jornada. Los instantes en que los pacientes llegan a la consulta son v.a. uniformes i.i.d. de parámetros $(0, b)$, $b > 1$. Diremos que el médico *alcanza el éxito* si atiende a exactamente 3 pacientes por jornada (cuando atiende a los 4 se agota demasiado y cuando atiende a menos de 3 los ingresos obtenidos no le son satisfactorios). Sea T la duración de la jornada laboral que fija el médico y considere que todo paciente que llegue en algún momento anterior a T con seguridad será atendido, y todo paciente que llegue después de T no será atendido.

3. (0.5 pts) Sea $Y_{(3)}$ el instante en que llega el tercer paciente a la consulta e $Y_{(4)}$ el instante en que llega el cuarto. Para un T arbitrario, calcule la probabilidad de que $Y_{(4)} > T$ dado que $Y_{(3)} = t_3$.
4. (1.5 pts) Para un T arbitrario, calcule la probabilidad de que el médico *alcance el éxito*. Encuentre la duración óptima T^* de la jornada, si lo que quiere el médico es maximizar esta probabilidad.

En lo que sigue, asuma que el médico ha escogido la extensión de su jornada según la parte anterior.

5. (0.5 pts) El ingreso percibido por cada paciente atendido en una jornada es de G. Adicionalmente, *alcanzar el éxito* le significa un beneficio adicional de E. Por el contrario, *no alcanzar el éxito* le significa un costo de C. Además considere que el costo fijo de mantenimiento de la consulta es igual a K. Encuentre su beneficio esperado por jornada.

6. (1.5 pts) Con la astucia del chileno, el médico ha logrado conseguir su probabilidad de alcanzar el éxito en $\frac{5}{64}$ (esto gracias a notables mejoras en su gestión en afán del éxito). Considere que el médico además debe elegir el número de jornadas que trabajará en un mes y está analizando 2 estrategias, trabajar N ó $N+1$ jornadas (N es un entero positivo). La decisión la tomará según el siguiente criterio: si la probabilidad de tener una mayor cantidad de éxitos trabajando $N+1$ jornadas que trabajando N jornadas es mayor que $1/2$, entonces decidirá trabajar $N+1$ jornadas por mes. De lo contrario, trabajará N jornadas por mes. ¿Qué decisión tomará el médico?

Problema 3

Considere el problema que enfrenta King en su empresa que vende un solo producto y tiene una política de ventas que modelaremos como programación dinámica.
Considere que King se ha fijado tener un stock objetivo s al inicio de cada semana t ($t \in \{1, ..., T\}$) . Sin embargo, si el presupuesto con que cuenta para esa semana no es suficiente para lograr dicho stock objetivo, entonces sólo pedirá el número de unidades que el presupuesto le permita [1]. Además considere que King nunca realiza un pedido por más de M unidades ($M < s$) y que puede acumular inventario de un período a otro.
El costo para King por cada unidad pedida en la semana t es de \$ C_t. Considere que los productos pedidos por King en una semana t estarán disponibles para ser entregados a partir de la misma semana t.
Al final de la semana t, King enfrentará una demanda distribuida según una v.a. de Poisson de parámetro λ_t. Esta demanda debería ser atendida en la semana $(t+1)$. Sin embargo, King decidirá libremente cuánta de esta demanda atender, sin sobrepasar el número de productos que tiene disponible en esa semana.
El presupuesto con que King cuenta al inicio del horizonte de evaluación es de \$ G.
Si la demanda al final de la semana $(t-1)$ sobrepasa el número de productos que King pondrá efectivamente a la venta en la semana t, entonces experimenta un decremento de L en su *utilidad* e incorporará un monto adicional al presupuesto que estará disponible a partir de la semana $(t+1)$. Este presupuesto adicional será equivalente a \$ $\alpha \cdot E_{t+1}$, en que es E_{t+1} es la demanda esperada para la semana $(t+1)$ (exprésela en términos de los parámetros anteriormente dados en el problema). Si la demanda al final de la semana $(t-1)$ no sobrepasa el número de productos que King pondrá para la venta en t, no se tiene decremento en utilidad ni presupuesto adicional.
Por cada producto vendido en la semana t, King percibe una *utilidad* U_t.
Si al final del horizonte de evaluación el número de semanas que King ha dejado demanda insatisfecha es superior a B entonces tendrá un decremento en su *utilidad* igual a A. Cada unidad disponible en inventario al final del horizonte de evaluación significa un decremento H en la *utilidad* de King. Por el contrario, si el inventario al final del horizonte de evaluación es cero, King recibirá una *utilidad* extra de J.

Considere que King cuenta con S unidades de producto al inicio del horizonte de evaluación ($S < s$), que la demanda para el primer periodo es D unidades y que al final de la semana T no hay demanda para la semana siguiente.

1. (0.5 pts.) Explique el *trade-off* que enfrenta King al decidir si atender o no a toda la demanda que enfrenta en una semana t.

2. (5.5 pts.) Plantee un modelo de programación dinámica que le permita a King encontrar la política óptima de ventas tal que maximice su *utilidad* esperada.

[1] Considere que el número de unidades a pedir debe ser una cantidad entera (no negativa).