Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

PAUTA CONTROL 1 IN44A

Problema 1

1. En este problema, se tiene que el número de votos que puede obtener cada candidato está asociado a una distribución binomial. De esta forma, el número esperado de votos en cada caso será la esperanza de una binomial.

   - Estrategia A, Stein responde y King contraataca con la estrategia C: En este caso la probabilidad que uno de los $N - N_e$ votantes vote por King es p_1. De esta forma el número esperado de votos será:

   $$E_{ARC} = E(votos) = \sum_{i=0}^{N-N_e} i \cdot \binom{N-N_e}{i} \cdot p_1^i \cdot (1-p_1)^{N-N_e-i} = (N - N_e) \cdot p_1 = 540$$

   Usando este resultado, se obtiene de manera análoga el número de votos esperado para cada combinación de sucesos distintos.

   - Estrategia A, Stein responde y King no contraataca:

   $$E_{AR} = E(votos) = (N - N_e) \cdot p_2 = 630$$

   - Estrategia A y Stein no responde:

   $$E_A = E(votos) = (N - N_e) \cdot p_3 = 450$$

   - Estrategia B, Stein responde y King contraataca con la estrategia C:

   $$E_{BRC} = E(votos) = (N - \left\lceil \frac{N_e}{2} \right\rceil) \cdot p_4 = 380$$

   - Estrategia B, Stein responde y King no contraataca:

   $$E_{BR} = E(votos) = (N - \left\lceil \frac{N_e}{2} \right\rceil) \cdot p_5 = 570$$

   - Estrategia B y Stein no responde:

   $$E_B = E(votos) = (N - \left\lceil \frac{N_e}{2} \right\rceil) \cdot p_6 = 760$$

   Nótese que para el caso general se ha supuesto que en el caso de que el número de ecologistas sea impar, votar la mitad menos uno por King (Como en el problema N_e es par no se exigía esa salvedad). Luego, usando estos valores esperados se obtiene el árbol de decisión de la Figura 1.

   Se desprende del análisis que Don King debe realizar la estrategia B y en caso de que Stein contraataque no debe hacer nada.

2. Al agregar el test, lo único que cambia es la probabilidad que Stein contrataque según los posibles resultados del test y el número de votantes que debe ser penalizado en 100 personas no ecologistas.

   Definimos:

   $T+$ = Test dice que Stein contraatacará

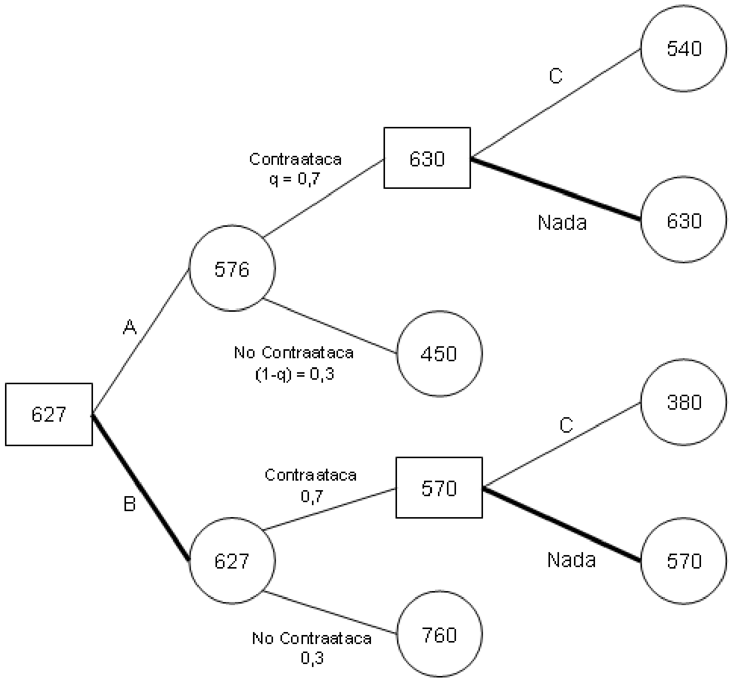

Figura 1: Árbol Parte 1 Problema 1

$T-$ = Test dice que Stein No contraatacará
C = Stein Contraatacará
NC = Stein No Contraatacará
Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} P(T+) &= P(T+/C) \cdot P(C) + P(T+/NC) \cdot P(NC) \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

Luego, $P(T-) = 1 - P(T+) = 0,35$
Con esta información procedemos a obtener las probabilidades que faltan.

$$\begin{aligned} P(C/T+) &= \frac{P(T+/C) \cdot P(C)}{P(T+)} \\ &= 0,86 \end{aligned}$$

Luego, $P(NC/T+) = 1 - P(C/T+) = 0,14$
Asimismo,

$$\begin{aligned} P(C/T-) &= \frac{P(T-/C) \cdot P(C)}{P(T-)} \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

Luego, $P(NC/T-) = 1 - P(C/T-) = 0,6$
De esta forma, usando las probabilidades recién calculadas obtenemos el árbol de la Figura 2.
Se desprende que no es conveniente realizar el Test, ya que el número esperado de votos en este caso es menor.

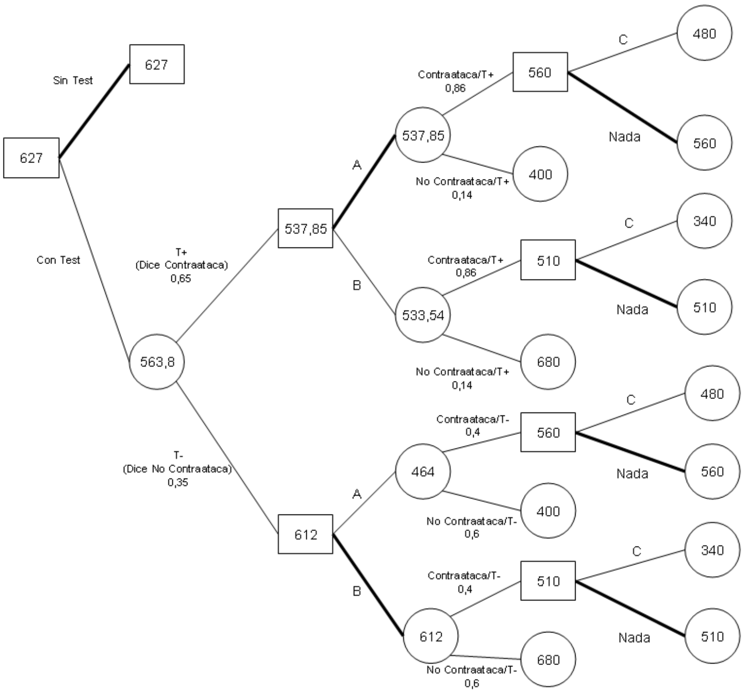

Figura 2: Árbol Parte 2 Problema 1

3. Una vez realizado todo el problema resulta fácil obtener esta expresión. Ésta es:

$$
\begin{aligned}
V(p_1,...,p_6,q,N,N_e) &= \text{máx}\{[q\cdot \text{máx}\{(N-N_e)\cdot p_1,(N-N_e)\cdot p_2\}+(1-q)(N-N_e)\cdot p_3],\\
&\left[q\cdot \text{máx}\{(N-\left\lceil \frac{N_e}{2}\right\rceil)\cdot p_4,(N-\left\lceil \frac{N_e}{2}\right\rceil)\cdot p_5\}+(1-q)(N-\left\lceil \frac{N_e}{2}\right\rceil)\cdot p_6\right]\}
\end{aligned}
$$

Problema 2

Parte 1

1. Esta pregunta tenía dos interpretaciones. Una era el valor esperado de la apuesta. Esto es:

$$E(apuesta) \quad = \quad 200 \cdot p_{ganar} + 0 \cdot p_{perder}$$

Sin embargo, también era posible considerar la utilidad esperada del jugador experto. Ester caso sería:

$$E(U(x)) \quad = \quad U(200) \cdot p_{ganar} + U(0) \cdot p_{perder}$$

Ambas interpretaciones llevan a tener que obtener la probabilidad de ganar del jugador experto. Luego, la probabilidad de ganar, $p_{ganar} = (1 - p_{perder})$ es:

$$p_{ganar} \quad = \quad P(X_4 > C / X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)$$

Donde, X_i es la v.a. que denota el número obtenido por el jugador i-ésimo y C es la v.a. que denota el número obtenido por el casino. Nótese que todas estas variables aleatorias se distribuyen U(0,100).

De esta forma, aplicando la definición de probabilidades condicionales tendremos que:

$$\begin{aligned}
p_{ganar} &= \frac{P(X_4 > C \wedge X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)}{P(X_3 < C \wedge X_2 < C \wedge X_1 < C)} \\
&= \frac{\int_0^{100} \left(\int_0^{X_4} \left(\int_0^C \int_0^C \int_0^C \left(\frac{1}{100}\right)^3 dX_1 dX_2 dX_3 \right) \frac{1}{100} dC \right) \frac{1}{100} dX_4}{\int_0^{100} \left(\int_0^C \int_0^C \int_0^C \left(\frac{1}{100}\right)^3 dX_1 dX_2 dX_3 \right) \frac{1}{100} dC} \\
&= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Resolviendo fácilmente la expresión anterior, nos queda que $p_{ganar} = \frac{1}{5}$. Este resultado es posible obtenerlo también con buenos argumentos. Así, la probabilidad del numerador es $1/5 \cdot 1/4$, que corresponde a la probabilidad que el experto gane sobre los 5 números y que el casino sea el segundo. De la misma forma, la probabilidad del denominador es $1/4$, que es la probabilidad que el casino sea quien gane de cuatro números.

De esta forma,

$E(apuesta) = 200 \cdot \frac{1}{5} = 40$

y,

$E(U(x)) = 19600 \cdot \frac{1}{5} = 3920$

Estos valores corresponden a la ganancia por apuesta esperada y a la utilidad esperada respectivamente.

2. Nuestro jugador experto tendrá como ingreso esperado \$40, que se traduce en una utilidad esperada de 3920. Luego, dado que si se retira se quedará con \$100, equivalente a una utilidad de $U(100) = 9900$, el si estaría dispuesto a pagar por retirarse. De esta forma, dependerá de su función de utilidad cuanto esta dispuesto a pagar. Así, lo primero que se debe hacer es obtener el equivalente cierto de la utilidad esperada para el jugador. Esto es,

$$p_{ganar} \cdot U(200) + p_{perder} \cdot U(0) \quad = \quad U(X^*)$$

Con esto obtenemos que $U(X^*) = 3920$ (No era necesario conocer este valor). Luego, si queremos obtener el valor de X^*, debemos resolver la siguiente ecuación.

$$
\begin{aligned}
p_{ganar} \cdot U(200) &= 100 \cdot U(X^*) = -0,01 \cdot (X^*)^2 \\
3920 &= 100 \cdot X^* - 0,01 \cdot (X^*)^2
\end{aligned}
$$

Luego, conocido el valor de X^*, que corresponde al monto equivalente cierto que obtendrá el jugador en este juego. De esta forma, el estará dispuesto a pagar como máximo $(100 - X^*)$ para retirarse.

En el caso de realizar los cálculos se tiene que $X^* \sim 39,5$ y de esta forma, el jugador experto estaría dispuesto a pagar $60,5$ o menos.

Parte 2

Etapas

Los productos: $k = 1, \ldots, 3$.

Variables de estado

- S_k: Presupuesto disponible antes de tomar la decisión de invertir en el producto k (En MM US$);

Variables de decisión

- x_k: inversión en publicidad en el producto k (En MM US$);

Funciones de recurrencia

- $S_{k+1} = S_k - x_k$;

Función de beneficio

$$V_k(S_k, x_k) = I_k(x_k) + V^*_{k+1}(S_{k+1})$$

Donde, $I_k(x_k)$ son las ventas esperadas en el producto k dada una inversión de x_k y,

$$V^*_k(S_k) = \max\{V_k(S_k, x_k) : x_k, 1 \leq x_k \leq S_k\}.$$

Condiciones de borde

- $S_1 = 6$;
- $V^*_4(S_4) = S_4$.

Luego, aplicando este modelo de programación dinámica determinística se obtiene lo siguiente.

- Producto 3:

S_3	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	V^*_3	x^*_3
1	6	i	i	i	6	1
2	$6+1$	9	i	i	9	2
3	$6+2$	$9+1$	13	i	13	3
4	$6+3$	$9+2$	$13+1$	15	15	4

- Producto 2:

S_2	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	V_2^*	x_2^*
2	$4+6$	i	i	i	10	1
3	$4+9$	$8+6$	i	i	14	2
4	$4+13$	$8+9$	$11+6$	i	17	$1, 2 \vee 3$
5	$4+15$	$8+13$	$11+9$	$14+6$	21	2

- Producto 1:

S_1	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	V_1^*	x_1^*
6	$7+21$	$10+17$	$14+14$	$17+10$	28	$1 \vee 3$

En base a lo anterior, las estrategias posibles son las siguientes:

- En el producto 1 invertir US$ 1 MM, en el producto 2 invertir US$ 2 MM y en el producto 3 invertir los US$ 3 MM restantes. Con esto el ingreso esperado es de US$ 28 MM.
- Invertir US$ 3 MM en el producto 1, US$ 2 MM en el producto 3 y el resto en el producto 1. Con esto se obtiene también un ingreso esperado de US$ 28 MM.

Problema 3

Observemos que las unidades disponibles para la venta durante una semana cualquiera son las que están en inventario al inicio de esa semana y las producidas durante esa semana. De manera similar, notemos que las unidades de materia prima disponibles para producción durante una semana son las que se encuentran en inventario al inicio de la semana más las pedidas esa semana.

Un modelo que cumple con lo solicitado es el siguiente:

Etapas

Cada semana del horizonte de planificación: $k = 1, \dots, K$.

Variables de estado

- A_k: número de unidades de materia prima en inventario al inicio de la semana k;
- G_k: número de unidades de producto en inventario al inicio de la semana k;

Variables de decisión

- x_k: número de unidades de materia prima a pedir al inicio de la semana k;
- y_k: número de unidades de producto a fabricar durante la semana k;

Estas variables deben cumplir las condiciones $x_k, y_k \geq 0$, $y_k \leq A_k + x_k$ para toda etapa k.

Variables aleatorias

- w_k: número de clientes que solicitan el producto durante la semana k.

Esta variable aleatoria toma valores enteros no negativos y tiene distribución dada por las probabilidades

$$P(w_k = l) = \binom{C}{l} (p_k)^l (1 - p_k)^{C-l} .$$

Denotemos estas probabilidades como α_l.

Funciones de recurrencia

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguientes relaciones:

- $A_{k+1} = A_k + x_k - y_k$;
- $G_{k+1} = \text{máx}(G_k + y_k - w_k, 0)$;

Función de beneficio

$$
\begin{aligned}
V_k &= V_k(A_k, G_k, x_k, y_k) \\
&= \begin{cases}
-N \times (A_k + x_k - y_k) + \\
\quad + \sum_{l=0}^{G_k} \alpha_l \left[-I \times \text{máx}(G_k + y_k - l, 0) + B \times \text{mín}(l, G_k + y_k) + V_{k+1}^*(A_k, \text{máx}(G_k - l, 0))\right] & \text{si } x_k = 0 \text{ e } y_k = 0\,; \\
-N \times (A_k + x_k - y_k) + Z + M \times x_k + \\
\quad + \sum_{l=0}^{G_k} \alpha_l \left[-I \times \text{máx}(G_k + y_k - l, 0) + B \times \text{mín}(l, G_k + y_k) + V_{k+1}^*(A_k, \text{máx}(G_k - l, 0))\right] & \text{si } x_k > 0 \text{ e } y_k = 0\,; \\
-N \times (A_k + x_k - y_k) + F_k + U_k \times y_k + \\
\quad + \sum_{l=0}^{G_k} \alpha_l \left[-I \times \text{máx}(G_k + y_k - l, 0) + B \times \text{mín}(l, G_k + y_k) + V_{k+1}^*(A_k, \text{máx}(G_k - l, 0))\right] & \text{si } x_k = 0 \text{ e } y_k > 0\,; \\
-N \times (A_k + x_k - y_k) + Z + M \times x_k + F_k + U_k \times y_k + \\
\quad + \sum_{l=0}^{G_k} \alpha_l \left[-I \times \text{máx}(G_k + y_k - l, 0) + B \times \text{mín}(l, G_k + y_k) + V_{k+1}^*(A_k, \text{máx}(G_k - l, 0))\right] & \text{si } x_k > 0 \text{ e } y_k > 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

y

$$V_k^*(A_k, G_k) = \text{máx}\{V_k(A_k, G_k, x_k, y_k) : x_k, y_k \geq 0,\ y_k \leq A_k + x_k\}\,.$$

Condiciones de borde

- $A_1 = L$;
- $G_1 = Q$;
- $V_{K+1}^*(A_{K+1}, G_{K+1}) = (S + N)A_{K+1} + (R + I)G_{K+1}$.

Comentarios al modelo

- Los costos de inventario se pagan al final de cada etapa, por eso el la definición de V_{K+1}^* además de los precios "de remate", debemos recuperar lo que pagamos de inventario al final.
- Si los costos de inventario se cargasen al principio de cada etapa debemos descontar los costos que estamos pagando por el inventario inicial, es decir, definimos

  $$V_{K+1}^*(A_{K+1}, G_{K+1}) = S \times A_{K+1} + R \times G_{K+1} + N \times L + I \times Q\,.$$

  En particular, en este caso, como lo que debemos "recuperar" es constante, incluirlo o no, no afecta la política óptima, sólo su "valor".
- En el modelo propuesto el hecho de poner una orden o fabricar en una semana y sus costos fijos se manejan de manera implícita separando por casos la definición de la función de beneficios. Esto también se podría hacer incluyendo variables de decisión binarias y así se podría dar una sola expresión. Por ejemplo, si al modelo de arriba le agregamos variables de decisión

- X_k: que vale 1 si pido materia prima en la etapa k y 0 en caso contrario e
- Y_k: que vale 1 si fabrico en la etapa k y 0 en caso contrario;

habría que realizar las siguientes modificaciones:

- A las condiciones en las variables de decisión (en la definición de éstas y en la definición de V_k^*) se agregan las condiciones: $x_k > 0 \Leftrightarrow X_k = 1$, $y_k > 0 \Leftrightarrow Y_k = 1$.
- La función de beneficio acumulado se puede escribir como:

$$\begin{aligned} V_k &= V_k(A_k, G_k, x_k, y_k, X_k, Y_k) \\ &= -N \times (A_k + x_k - y_k) + Z \times X_k + M \times x_k + F_k \times Y_k + U_k \times y_k + \\ &\quad + \sum_{l=0}^{G_k} \alpha_l \left[-I \times \text{máx}(G_k + y_k - l, 0) + B \times \text{mín}(l, G_k + y_k) + V_{k+1}^*(A_k, \text{máx}(G_k - l, 0)) \right] \end{aligned}$$