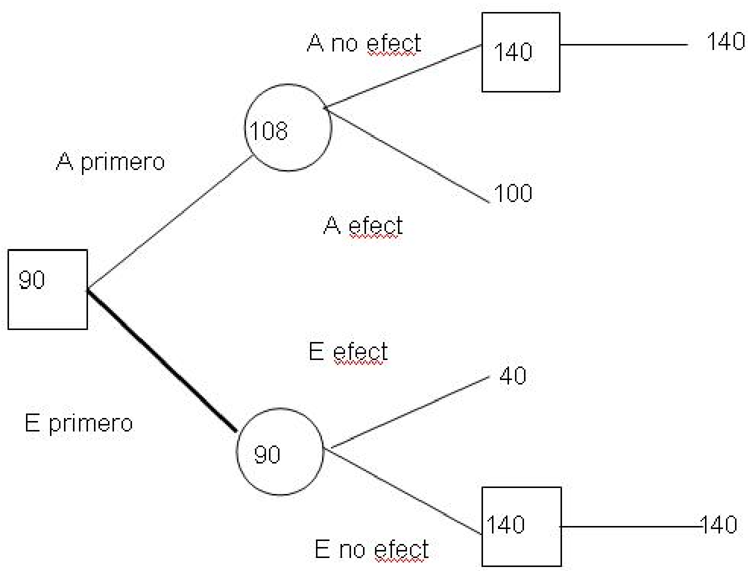
Solución Control 1
2 de Septiembre de 2005

Problema 1

1. El árbol se muestran en las figura:



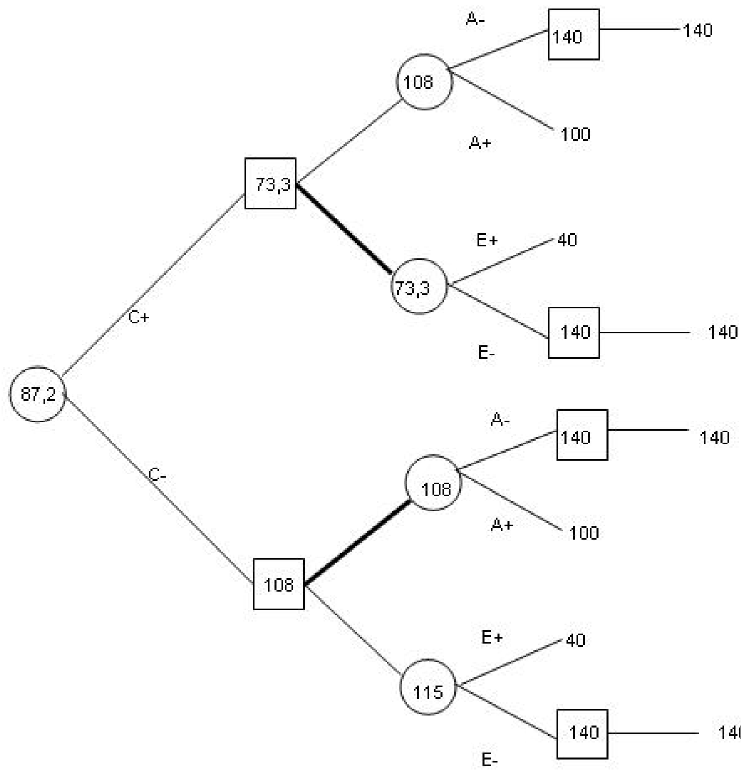
2. En el segundo árbol, las letras significan lo siguiente:
   - $A+$, $A-$: si el compuesto A fue eficiente ($A+$) o no ($A-$).
   - $E+$, $E-$: si el compuesto E fue eficiente ($E+$) o no ($E-$).
   - $C+$, $C-$: si el compuesto E fue eficiente en castores ($C+$) o no ($C-$).

   Las probabilidades necesarias se calculan facilmente:

$$P(C+) = P(C+|E+)P(E+) + P(C+|E-)P(E-) = 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}6\,;$$
$$P(E+|C+) = \frac{P(C+|E+)P(E+)}{P(C+)} = \frac{0{,}8 \times 0{,}5}{0{,}6} = 2/3\,;$$

y

$$P(E-|C-) = \frac{P(C-|E-)P(E-)}{P(C-)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}5}{0{,}4} = 0{,}75\,.$$



Del resultado del árbol, se puede concluir que el máximo dispuesto a pagar por el laboratorio para realizar la prueba en castores es 2,8 millones: $90 - 87{,}2 = 2{,}8$.

Problema 2

1. Para que $Y_{(i)}$ sea igual a x obligatoriamente $i-1$ de las variables Y_i tienen que ser menores a y y $n-i$ mayores a y. Como existen $\binom{n}{i-1}$ formas de escoger qué variables Y_i serán menores que y y de las $(n-(i-1))$ restantes existen $\binom{n-(i-1)}{1}$ formas de escoger cuál será la i-ésima, tenemos que:

$$f_{Y_{(i)}}(y) = \binom{n}{i-1}\binom{n-(i-1)}{1} F(y)^{i-1}\overline{F}(y)^{n-i} f(y) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F(y)^{i-1}\overline{F}(y)^{n-i} f(y)$$

2. Se pide $P(Y_{(i+1)} \leq y / Y_{(i)} = s)$
Es claro ver que cuando $y \leq s$ la probabilidad anterior es cero.
En el caso $y > s$ se tiene que la probabilidad anterior equivale a que el mínimo de las $(n-i)$ variables que ocurren después de la i-ésima sea $\leq y$ (y obviamente, mayor que s). Para obtenerla, notemos que en la expresión de la parte 1, ahora $(n-i)$ jugaría el papel de n y 1 juega el papel de i. Luego:

$$P(Y_{(i+1)} \leq y / Y_{(i)} = s) = \frac{\int_s^y \frac{(n-i)!}{(1-1)!(n-i-1)!} F(y)^{1-1}\overline{F}(y)^{n-i-1} f(y)dy}{\int_s^\infty \frac{(n-i)!}{(1-1)!(n-i-1)!} F(y)^{1-1}\overline{F}(y)^{n-i-1} f(y)dy}$$

$$P(Y_{(i+1)} \leq y / Y_{(i)} = s) = \frac{\int_s^y \overline{F}(y)^{n-i-1} f(y)dy}{\int_s^\infty \overline{F}(y)^{n-i-1} f(y)dy}$$

3. De la parte 2, con $n = 4$ e $i = 3$, se tiene que:

$$P(Y_{(4)} > T / Y_{(3)} = t_3) = 1 - P(Y_{(4)} \leq T / Y_{(3)} = t_3) = 1 - \frac{\int_{t_3}^T \frac{1}{b}}{\int_{t_3}^b \frac{1}{b}} = \frac{b-T}{b-t_3}$$

4. La probabilidad de alcanzar el éxito en una jornada de largo T, es $P_{ex}(T) = P(Y_{(3)} < T, Y_{(4)} > T)$. Para calcularla, condicionaremos al valor que toma $Y_{(3)}$, lógicamente sobre el dominio en que $Y_{(3)} < T$:

$$P_{ex}(T) = \int_0^T P(Y_{(4)} > T / Y_{(3)} = t_3) f_{Y(3)}(t_3) dt_3$$

De la parte 1:

$$f_{Y(3)}(t_3) = 12(\frac{t_3}{b})^2 (\frac{b - t_3}{b}) \frac{1}{b}$$

Incorporando el resultado obtenido en la parte 3, se tiene:

$$P_{ex}(T) = \frac{12(b-T)}{b^4} \int_0^T t_3^2 dt_3 = 4[(\frac{T}{b})^3 - (\frac{T}{b})^4]$$

Para obtener T^*, hacemos $\frac{dP_{ex}}{dT} = 0$, de lo que se obtiene $T^* = \frac{3}{4}b$ (Aunque no se considera necesario para efectos de corrección, se puede comprobar que la segunda derivada en este T^* es $\frac{-9}{4} < 0$ y el único otro punto crítico es $T = 0$, que no nos sirve para el problema, luego T^* maximiza la probabilidad de alcanzar el éxito).

5. $E(Ut) = \sum_{i=1}^{3} P(Y_{(i)} < T^*, Y_{(i+1)} > T^*) \cdot iG + 4G \cdot P(Y_{(4)} \leq T^*) + E \cdot P_{ex}(T^*) - C \cdot (1 - P_{ex}(T^*)) - K$
No es necesario reemplazar las expresiones de las probabilidades (y para efectos de corrección, tampoco se considera necesario haber realizado las partes anteriores).

6. Notemos que $P_{ex}(T^*) = \frac{3^3}{4^2} - \frac{3^4}{4^3} = \frac{27}{64}$.
Como en esta parte el médico incrementa las probabilidades de éxito en $\frac{5}{64}$, se tiene un nuevo $P_{ex} = \frac{27}{64} + \frac{5}{64} = \frac{1}{2}$
Para comparar las dos estrategias, fijémonos primero en qué circunstancias pueden quedar ambas en las primeras N jornadas. Es claro que las probabilidades de que una u otra estrategia tenga más éxitos hasta la jornada N-ésima son las mismas, digamos q. Además, es posible que lleguen empatadas, digamos con probabilidad P_{emp}. Luego:

$$2q + P_{emp} = 1$$

Ahora, sea P_g la probabilidad de tener más éxitos trabajando $N+1$ jornadas que trabajando N jornadas. Condicionando a lo que puede ocurrir con ambas estrategias hasta una jornada N-ésima (cuando llegan empatados, se requiere que en la $(N+1)$-ésima jornada se alcance al éxito, lo que ocurre con probabilidad $\frac{1}{2}$; si se llega con más éxitos entonces pase lo que pase en la $(N+1)$-ésima jornada la política de (N+1) resulta tener más éxitos; si llega con menos éxitos, pase lo que pase en la $(N+1)$-ésima jornada la política de (N+1) resulta no tener más éxitos). Luego:

$$P_g = P_{emp} \cdot \text{ P(tener éxito la jornada } (N+1)\text{-ésima) } + q = \tfrac{1}{2} P_{emp} + q$$

Reemplazando $\frac{1}{2}P_{emp}$ según la ecuación que habíamos obtenido anteriormente, se tiene:

$$P_g = (\tfrac{1}{2} - q) + q = \tfrac{1}{2}$$

Como no se cumple que $P_g > \frac{1}{2}$, el médico decidirá trabajar N jornadas por mes.

(Se puede intentar calcular P_g condicionando al número de éxitos en una de las jornadas e imponiendo para la otra que se cumpla la condición que con $N+1$ se tenga más éxitos que N, pero las sumatorias que aparecen quedan algo más complicadas de trabajar...).

Problema 3

1. *Dejar de vender hoy para guardar para mañana.* Puede que le convenga guardar producto para los próximos períodos si U_t es mayor en el futuro, o si el costo C_t será mayor tb, si la demanda esperada es mayor para el futuro, si el presupuesto G_t no es suficiente para comprar en estos períodos tomando en cuenta que puede ser más conveniente vender en el futuro, si quiere incrementar presupuesto dejando demanda insatisfecha aun asumiendo el decremento en utilidad que eso significa.

2. - **Etapas:**
     - $t = 1, \ldots, T$ c/u de las semanas.
   - **Variables de estado:**
     - S_t, Inventario al inicio de la semana $t(t \in \{0, \ldots, T\})$.
     - G_t, Presupuesto al comienzo de la semana $t(t \in \{0, \ldots, T\})$.
     - N_t, número de semanas en que ha habido demanda insatisfecha hasta el comienzo de la semana $t(t \in \{0, \ldots, T\})$.
     - D_t, unidades demandas por los clientes de King al final de la semana $(t-1)$, $t(t \in \{1, \ldots, T\}$ (Nota: no es estrictamente necesario declarar la variable D_t, pero da más facilidad para el manejo de las expresiones posteriores).
   - **Variable de decisión:**
     - Z_t, unidades de producto demandado que King decide satisfacer en t (cuando optimicemos, debemos cuidar que esta variable no sea mayor que las unidades disponibles en t).
   - **Variable aleatoria:**
     - X_t, demanda por productos enfrentada por King al final de la semana t.
   - **Recurrencias:**

$$S_{t+1} = S_t - Z_t + Min\{M, \lfloor \frac{G_t}{C_t} \rfloor, s - (S_t - Z_t)\}$$
$$G_{t+1} = G_t - C_t \cdot Min\{M, \lfloor \frac{G_t}{C_t} \rfloor, s - (S_t - Z_t)\} + \alpha \lambda_{t+1} \cdot Max\{0, Min\{1, D_t - Z_t\}\}$$
$$N_{t+1} = N_t + 1 \cdot Max\{0, Min\{1, D_t - Z_t\}\}$$
$$D_{t+1} = X_t$$

   - **Función de Beneficio esperado:**

     Etapa T+1:
     $V^*_{T+1}(S_{T+1}, G_{T+1}, N_{T+1}, D_{T+1}) = A \cdot Min\{1, Max\{0, N_{T+1} - B\}\} - H \cdot S_{T+1} + J \cdot Max\{0, Min\{1, 1 - S_{T+1}\}\}$

     Etapa genérica t:

$$V_t(S_T, G_T, N_T, D_t, Z_t) =$$
$$\sum_{X_t=0}^{\infty} [U_t Z_t - L \cdot Max\{0, Min\{1, D_t - Z_t\}\} + V^*_{t+1}(S_{t+1}, G_{t+1}, N_{t+1}, D_{t+1})] \cdot \frac{(\lambda_t)^{X_t} e^{(-\lambda_t)}}{X_t!}$$

     Donde:

$$V^*_t(S_t, G_t, N_t, D_t) = \max_{Z_t \leq S_t} V_t(S_t, G_t, N_t, D_t, Z_t)$$

     Así, el beneficio esperado óptimo se obtiene con:

$$V^* = V^*_1(S_1, G_1, N_1, D_1)$$

   - **Condiciones de Borde:**

$$S_1 = S \qquad G_1 = G \qquad N_1 = 0 \qquad D_1 = D \qquad D_T = 0$$

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl