Solución Auxiliar 3

Martes 31 de Julio de 2007

Problema 1

1. Sea λ el parámetro del tiempo que demora cada caballo en llegar a la meta. Sea $T = \{t_i\}_{i=1}^{15}$ el conjunto de los tiempos que tardan los caballos en legar a la meta. Sabemos $t_i \rightsquigarrow exp(\lambda)$. Sea t_s el tiempo que demora el caballo que eligió Saavedra, con $s \in \{1.,15\}$.

   - Sea P el evento *caballo de Saavedra sale primero*,

   $$P(P) = P(t_s < min\{T \setminus \{t_s\}\} = \frac{\lambda}{14\lambda + \lambda} = \frac{1}{15}$$

   - Sea S el evento *caballo de Saavedra sale segundo*,

   $$\begin{aligned} P(S) &= P(S|min\{T \setminus \{t_s\}\} < t_s) \cdot P(min\{T \setminus \{t_s\}\} < t_s) \\ &= P(t_s < min\{T \setminus \{t_s, min\{T \setminus t_s\}\}\} | min\{T \setminus \{t_s\}\} < t_s) \cdot P(min\{T \setminus \{t_s\}\} < t_s) \end{aligned}$$

   Del primer término puede obviarse la condición por la pérdida de memoria de la exponencial, quedando

   $$\begin{aligned} P(S) &= P(t_s < min\{T \setminus \{t_s, min\{T \setminus t_s\}\}\}) \cdot P(min\{T \setminus \{t_s\}\} < t_s) \\ &= \frac{\lambda}{13\lambda + \lambda} \cdot \frac{14\lambda}{14\lambda + \lambda} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

   - Sea T el evento *caballo de Saavedra sale tercero*. Por un razonamiento análogo al utilizado para el cálculo de P(S), se obtiene

   $$\begin{aligned} P(T) &= P(T|min\{T \setminus t_s\} < t_s \wedge min\{T \setminus \{t_s, min\{T \setminus t_s\}\}\} < t_s) \cdot \\ &\quad P(min\{T \setminus t_s\} < t_s) \cdot P(min\{T \setminus \{t_s, min\{T \setminus t_s\}\}\} < t_s) \\ &= \frac{\lambda}{12\lambda + \lambda} \cdot \frac{13\lambda}{13\lambda + \lambda} \cdot \frac{14\lambda}{14\lambda + \lambda} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

   - La utilidad esperada al apostar a cualquier caballo en este juego es

   $$E(U_1) = -100{,}000 + \frac{1}{15}(2 \cdot 100{,}000) + \frac{1}{15}(1{,}5 \cdot 100{,}000) + \frac{1}{15}(1{,}1 \cdot 100{,}000) = -69{,}333[um]$$

2. Sea N una v.a. que representa el número de veces que salen los dados que Oscar pronosticó.

   Si p es la probabilidad de obtener el par de dados elegidos en un lanzamiento, N se distribuye según una binomial de parámetros 10 y p. Si eligió dos número iguales, $p = \frac{1}{36}$, si eligió dos número distintos, $p = \frac{1}{18}$ ya que no importa el orden de los dados.

   Se tiene $E(N) = 10p$, por lo tanto la esperanza de las utilidades de apostar serán $E(U_2) = -100{,}000 + 70{,}000 \cdot 10p$. Dado que Oscar es racional, eligirá dos números distintos, por lo tanto tendremos

   $$E(U_2) = -100{,}000 + 70{,}000 \cdot 10 \cdot \frac{1}{18} = -61{,}111$$

3. Sea T_j^i el tiempo que tarda en caer la i-ésima gota del cubo j, desde que calló la (i-1)-ésima.

   Se tiene $T_i^j \rightsquigarrow exp(\lambda_j) \;\; \forall i \in N, j \in \{a,b\}$ Sea Y el evento *caen dos gotas de A antes que caiga una de B*. Desarrollamos entonces,

$$P(Y) = P(T_1^a + T_2^a < T_1^b | T_1^a < T_1^b) \cdot P(T_1^a < T_1^b)$$

   Dado que la exponencial tiene pérdida de memoria,

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(T_2^a < T_1^b) \cdot P(T_1^a < T_1^b) \\ &= \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \\ &= \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \right)^2 = \frac{784}{1849} \end{aligned}$$

   Suponemos que Saavedra elegirá el resultado más probable, por lo tanto la esperanza de su utilidad será

$$E(U_3) = 100{,}000 \left((1{,}7 - 1)\frac{1065}{1849} + (0-1)\frac{784}{1849} \right) = -2{,}082$$

$\Rightarrow$ Conviene jugar a los hielos

Problema 2

1. La nota de cada uno de los alumnos (n_i) sigue una exponencial de parámetro λ_s y en la semana s quedan $K - s + 1$ participantes. Ocupando un resultado conocido en cátedra y clase auxiliar,

$$min(n_1, n_2, .., n_{K-s+1}) \rightsquigarrow exp((k - s + 1) \cdot \lambda_s)$$

   La probabilidad de que Tony Valero sea el amenazado por conocimientos de la semana s s es igual a la probabilidad que su nota sea la menor de entre los $(K - s + 1)$ participantes. Dado que su nota $(exp(\lambda_s))$ compite con la peor del resto $(exp((K - s)\lambda_s))$, nuevamente utilizamos un resultado visto en clase. Denotando a esta probabilidad como a_s tenemos

$$a_s = P(\textbf{Nota de Tony} < \textbf{Todas las demás notas}) = \frac{\lambda_s}{(K - s + 1)\lambda_s} = \frac{1}{K - s + 1}$$

   Otra forma de justificar este rezultado es decir que dado que todos los participantes tienen la misma distribución para su nota es igualmente probable que cualquiera de ellos resulte amenazado. Por esto, la probabilidad de que cualquiera de ellos sea amenazado, en particular Valero, es la misma, es decir.

$$a_s = \frac{1}{K - s + 1}$$

2. La probabilidad de que Tony sea el eliminado de la semana s está condicionado a lo sucedido en las s-1 semanas anteriores. Para ello, definamos el siguiente evento:
   B_{s-1} = Valero no ha sido eliminado en las s-1 primeras semanas.
   Condicionando sobre este evento, se tiene

$$\begin{aligned} P(F_s) &= P(F_s | B_{s-1}) \cdot P(Bs - 1) + P(F_s | {\sim} B_{s-1}) \cdot P({\sim} B_{s-1}) \\ &= P(F_s | B_{s-1}) \cdot P(B_{s-1}) + 0 \end{aligned}$$

La probabilidad de que nuestro protagonista sea el eliminado en la semana s dado que todavía está en competencia está dada por la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por conocimientos o que no sea el amenazado por conocimientos, sea amenazado por convivencia y el eliminado sea el amenazado por convivencia. Esto es:

$$P(F_s|Bs-1) = a_s \cdot q_s + (1-a_s) \cdot p_s \cdot (1-q_s)$$

Por otro lado, para no ser eliminado en las primeras s-1 semanas se tiene que dar en cada una de dichas semanas uno de los siguientes eventos:

- No ser amenazado por conocimientos, ni por convivencia
- Ser amenazado por conocimientos y el eliminado sea el amenazado por convivencia.
- Ser amenazado por convivenca y el eliminado sea el amenazado por conocimientos.

Luego:

$$\begin{aligned} P(B_{s-1}) &= \prod_{i=1}^{s-1} P[\textbf{No ser eliminado en la semana i}] && (1)\\ &= \prod_{i=1}^{s-1} [(1-a_i)\cdot(1-p_i) + a_i \cdot (1-q_i) + (1-a_i)\cdot p_i \cdot q_i] && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

o, utilizando el resultado de la parte anterior:

$$P(_{s-1}) = \prod_{i=1}^{s-1}(1-(F|B_{i-1}))$$

Finalmente,

$$F_s = [a_s \cdot q_s + (1-a_s)\cdot p_s \cdot (1-q_s)] \cdot \prod_{i=1}^{s-1}[(1-a_i)\cdot(1-p_i) + a_i\cdot(1-q_i) + (1-a_i)\cdot p_i \cdot q_i]$$

3. Sea N el número de semanas dentro de la sala-estudio, luego la esperanza viene dada por

$$E(N) = \sum_{j=1}^{K-4} E(N|\textbf{Es eliminado en j}) \cdot P(\textbf{Es eliminado en j}) = \sum_{j=1}^{K-4} j \cdot F_j$$

4. La probabilidad de ser el ganador depende de si Valero está o no entre los finalistas del concurso. Condicionando sobre este evento:

$$\begin{aligned} P(ganar) &= P(ganar|esfinalista)\cdot P(esfinalista) + P(ganar|noesfinalista)\cdot P(noesfinalista)\\ &= P(ganar) = P(ganar|esfinalista)\cdot P(esfinalista) + 0 \end{aligned}$$

La probabilidad de ser finalista fue calculada en la parte 4. La probabilidad de ganar dado que está en la final se calcula de la siguiente manera. Definamos la variable t_i como el tiempo que demora el alumno i-ésimo en terminar el examen. Para ser el ganador se pueden dar las siguiente situaciones:

- Ser el primero en terminar y contestar correctamente:

$$P_1 = P(t_{tony} < \textbf{resto de los } t_i) \cdot P(\textbf{contesta bien}) = \frac{\mu}{4\mu}(1-r) = \frac{1}{4}(1-r)$$

- Ser el segundo en terminar, que el primero responda mal y Valero bien:

$$P_2 = \frac{3\mu}{4\mu} r \frac{\mu}{3\mu}(1-r) = \frac{1}{4} r(1-r)$$

- Ser el tercero en terminar, que los 2 primeros respondan mal y Valero bien:

$$P_3 = \frac{3\mu}{4\mu} r \frac{2\mu}{3\mu} r \frac{\mu}{2\mu}(1-r) = \frac{1}{4} r^2(1-r)$$

- Ser el último en terminar, que los 3 primeros respondan mal y Valero bien:

$$P_4 = \frac{3\mu}{4\mu} r \frac{2\mu}{3\mu} r \frac{\mu}{2\mu} r(1-r) = \frac{1}{4} r^3(1-r)$$

  Notemos que para la obtención de cada uno de estos resultados hemos utilizado 3 resultados conocidos:

- La distribución del menor tiempo de respuesta entre i alumnos se distribuye $exp(i \cdot \lambda)$.
- La prob que una $exp(\lambda_s)$ sea menor que una $exp(i \cdot \lambda_s)$ es $\frac{\lambda_s}{\lambda_s + i \cdot \lambda_s}$.
- La pérdida de memoria de la exponencial. Esto es, cada vez que un alumno termina de contestar y lo hace mal, todas las distribuciones se reinician y las exponenciales compiten desde 0 nuevamente.

Los dos primeros resultados pueden ser reemplazados por el argumento de equiprobabilidad en el término de la prueba, pero la pérdida de memoria es un resultado crucial. Luego:

$$P(\textbf{ganar}|\textbf{es finalista}) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

Finalmente:

$$P(\textbf{ganar}) = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \cdot \prod_{i=1}^{s-1} [(1-a_i)\cdot(1-p_i) + a_i \cdot (1-q_i) + (1-a_i)\cdot p_i \cdot q_i]$$

Dudas y/o errores:
Jaime Gacitúa C.
jgacitua@ing.uchile.cl