

Pauta auxiliar: Miércoles 7 de noviembre de 2007

Problema 1

Considere un sistema de colectivos que funciona de la siguiente manera. Los pasajeros llegan al paradero de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ pasajeros por minuto. El tiempo entre las llegadas de los colectivos vacíos al paradero se distribuye exponencialmente con media $1/\mu$ minutos. El tiempo entre dos colectivos es independiente de las otras llegadas, del momento del día y del proceso de llegada de pasajeros.

Los colectivos tienen capacidad para transportar dos pasajeros. Si un colectivo llega al paradero y hay menos de 2 pasajeros no se detiene a recogerlos.

1. (1,5 puntos) Modele el número de pasajeros en el paradero como una cadena de Markov en tiempo continuo.

El número de pasajeros puede ser representado por una cadena con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ y con tasas de transición:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{si } j = i + 1, \\ 2\mu & \text{si } j = i - 2, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. (1,0 punto) ¿Qué relación debe existir entre las tasas de llegada de pasajeros y de colectivos para que la cadena del punto anterior admita probabilidades estacionarias? Explique.

Se debe cumplir que $\lambda < 2\mu$. Para que la cadena propuesta admita probabilidades estacionarias se debe tener que la tasa de entrada para los “estados grandes” sea menor que la tasa de “atención”.

3. (1,5 puntos) Suponga que la cadena propuesta admite probabilidades estacionarias. Calcule la probabilidad que un colectivo cualquiera (se detenga o no a recoger pasajeros) que llegue al paradero encuentre un número impar de pasajeros esperando.

Como el proceso de llegada de colectivos es un proceso de Poisson, la probabilidad que un colectivo encuentre k personas en el paradero es igual a π_k , la probabilidad estacionaria asociada al estado “hay k pasajeros en el paradero”.

Por lo tanto, lo que queremos calcular es $p = \sum_{k \text{ impar}} \pi_k$.

Para esto, primero calculamos la tasa promedio de transiciones de estados impares a estados pares: $\sum_{k \text{ impar}} \pi_k \lambda = p\lambda$. Luego, la tasa promedio de transiciones de estados pares a estados impares es igual a $\sum_{k \text{ par}} \pi_k \lambda = (1 - p)\lambda$. Como ambas tasas deben ser iguales, debe valer que $p = 1 - p$ y por lo tanto $p = 1/2$.

4. Suponga que la cadena propuesta admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas. Denotando por π_k a la probabilidad estacionaria asociada al estado “hay k pasajeros en el paradero” responda las siguientes preguntas:

- a) (0,5 puntos) ¿Cuántos pasajeros hay en promedio en el paradero?

En promedio, hay $\sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k$ pasajeros en el paradero.

- b) (0,5 puntos) ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, un pasajero en el paradero?

Para esto usamos la respuesta de la pregunta anterior y la Fórmula de Little: un pasajero pasa, en promedio $(\sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k)/\lambda$ minutos en el paradero.

- c) (0,5 puntos) ¿Cuántos colectivos pasan por el paradero y no se detienen, en promedio, en una hora?

En promedio, $60\mu(\pi_0 + \pi_1)$ colectivos no se detienen por hora.

- d) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que, dado que un colectivo se detuvo a recoger pasajeros, el paradero quede vacío cuando parta?

La probabilidad que, dado que un colectivo se detuvo a recoger pasajeros, el paradero quede vacío cuando parta es igual a $\pi_2/(1 - \pi_0 - \pi_1)$.

Problema 2

Una oficina de atención cuenta con un mesón con espacio para dos cajeros y una sala de espera para $E - 2$ clientes.

Cuando hay Q ($Q \leq E - 2$) o menos clientes en el local, sólo uno de los cajeros atiende al público. Cuando la cantidad de clientes supera este límite Q , los dos cajeros atienden al público. Cuando el número de clientes vuelve a ser menor o igual que Q , se vuelve al caso de un solo cajero atendiendo.

Cada cajero, al terminar de atender a un cliente cuenta el número de clientes en el sistema y si es menor o igual a Q y si el otro cajero está atendiendo, entonces decide cerrar su caja.

Los clientes llegan al local de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ clientes por hora. Si al llegar no hay lugar para esperar, este cliente no entra al local.

Cualquiera de los dos cajeros demora en atender a un cliente un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ horas.

El costo de tener un segundo cajero trabajando es de V miles de pesos por hora, mientras que se pierden R miles de pesos por cada cliente que llegó y no pudo entrar.

1. (2,0 puntos) Modele el funcionamiento de la oficina como una cadena de Markov en tiempo continuo.

El sistema se puede modelar como un proceso de nacimiento y muerte con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots, E\}$ y con tasas de transición definidas por: $\lambda_i = \lambda$ para $i = 0, 1, 2, \dots, E - 1$ y $\mu_i = \mu$ para $i = 1, 2, \dots, Q$ y $\mu_i = 2\mu$ para $i = Q + 1, \dots, E$.

2. (1,0 punto) Exprese las probabilidades estacionarias de la cadena del punto anterior en función de π_0 y de los otros parámetros del problema.

Definiendo $\rho = \lambda/\mu$, las probabilidades estacionarias se pueden expresar como

$$\pi_k = \begin{cases} \rho^k \pi_0 & \text{si } k \leq Q, \\ 2^{Q-k} \rho^k \pi_0 & \text{si } k > Q. \end{cases}$$

3. (2,0 puntos) Calcule el valor de π_0 en función de los parámetros del problema.

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \left[\sum_{k=0}^Q \rho^k + \sum_{k=Q+1}^E 2^{Q-k} \rho^k \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{1 - \rho^{Q+1}}{1 - \rho} + \frac{(2\rho)^{Q+1} - (2\rho)^{E+1}}{2^Q(1 - 2\rho)} \right]^{-1}\end{aligned}$$

4. (1,0 punto) Calcule el costo promedio por hora de funcionamiento de la oficina.

El costo promedio de la hora de funcionamiento de la oficina es la suma de los costos por clientes perdidos, $\lambda \pi_E R$, más el costo por el segundo cajero, $V \sum_{k=Q+1}^E \pi_k$.

Problema 3

Un centro de cobranzas recibe clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ clientes por minuto. Esta oficina cuenta con dos cajas. Los clientes forman filas separadas para cada caja y por la localización de las cajas, los clientes no se pueden cambiar de fila. El tiempo de atención en ambas cajas para un cliente cualquiera se distribuye exponencialmente con media $1/\mu$ minutos. Un cliente cualquiera decide equiprobablemente a qué caja dirigirse.

1. (1,0 punto) ¿Qué relación deben cumplir las tasas de llegada y de atención para que el sistema descrito admita probabilidades estacionarias?

Se debe cumplir que la tasa de llegada a la cola $\lambda/2$ sea menor a la tasa de atención μ .

2. (1,5 puntos) Suponga que se cumple la condición anterior. ¿Cuánto tiempo se demora, en promedio, un cliente cualquiera en la oficina?

Cada cola es un sistema M/M/1, con tasa de entrada $\lambda/2$ y tasa de atención μ . Por lo tanto, el tiempo que pasa un cliente, en promedio es igual a

$$W_1 = \frac{L_1}{(\lambda/2)} = \frac{2\rho}{(1 - \rho)\lambda},$$

con $\rho = \lambda/(2\mu)$.

Se está evaluando la posibilidad de redistribuir las cajas de manera que los clientes formen una fila única para la atención en cualquiera de las dos cajas.

3. (2,5 puntos) ¿Cuánto tiempo se demora, en promedio, un cliente cualquiera en la oficina con la nueva disposición?

Con la nueva disposición, se tiene un sistema M/M/2, con tasa de entrada λ y tasa de atención μ . Por lo tanto, el tiempo que pasa un cliente, en promedio es igual a

$$W_2 = L_2/\lambda = \frac{\rho(2 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)\lambda} = \frac{\rho(2 - \rho^2)}{(1 + \rho)(1 - \rho)\lambda},$$

con $\rho = \lambda/(2\mu)$. Como $2 > \frac{2 - \rho^2}{1 + \rho}$, W_2 es menor a W_1 .

4. (1,0 punto) Explique intuitivamente a qué se debe esta diferencia con el tiempo calculado en el punto 2.

Esta diferencia se debe, a que si bien parte del tiempo ambos sistemas están trabajando con una tasa de atención total 2μ , hay casos en que en la disposición original (filas separadas) puede haber personas esperando en una de las colas y estar otro servidor desocupado, por lo tanto estar atendiendo a tasa μ , mientras que en la segunda disposición (fila única) la tasa de atención se reduce a μ sólo en el caso que hay una sola persona en el sistema, en los otros casos seguiría siendo 2μ .