

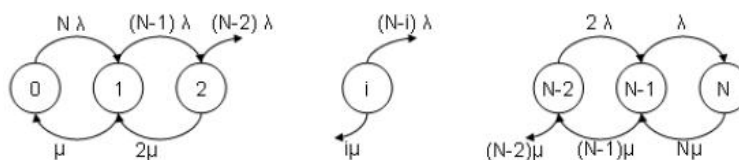


## Solución Auxiliar

Martes 31 de Octubre de 2007

### Problema 1

1. Siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante se muestra en la figura.



2. En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias.

Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las fórmulas de los procesos de nacimiento y muerte. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned}\pi_i &= \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \dots (M-i+1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\ &= \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^M\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_i = \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros  $(M, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$

3. El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

4. Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] = \binom{M}{\frac{M}{2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}}$$

5. La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned}
 Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot (M-i)\lambda \\
 &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M-i} \cdot (M-i)\lambda \\
 &= M\lambda - M\lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \\
 &= M\lambda \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

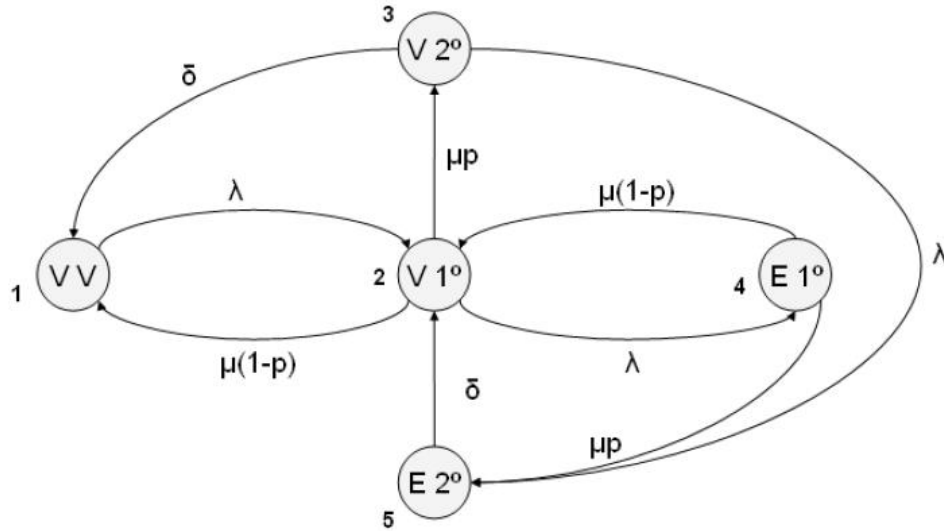
6. La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned}
 Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot i \cdot \mu \\
 &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\
 &= M\mu \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no, no existiría estado estacionario.

## Problema 2

1. La cadena queda de la siguiente forma (se deben especificar las tasas de transición en lugar de las probabilidades de transición)



El por que se puede modelar como una cadena de Markov tiene que ver con la distribución de los tiempos entre transiciones y la perdida de memoria de la distribución exponencial. Las ecuaciones de

estado estacionario son bastante parecidas a ecuaciones de conservación de Flujo. Lo que entra (a la tasa a la que lo hace) es igual a todo lo que sale (la tasa a la que lo hace).

$$\begin{aligned}
 \pi_1 \lambda &= \Pi_2 \mu (1 - p) + \Pi_3 \delta \\
 \Pi_2 (\mu + \lambda) &= \Pi_1 \lambda + \Pi_3 \delta + \Pi_4 \mu (1 - p) \\
 \Pi_3 (\delta + \lambda) &= \Pi_2 \mu p \\
 \Pi_4 \mu &= \Pi_2 \lambda \\
 \Pi_5 \delta &= \Pi_4 \mu p + \Pi_3 \lambda \\
 \sum_i \Pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

2. En el largo plazo del total de clientes que llegan al sistema, solo podrán entrar los que lo encuentren en los estados 1, 2 o 3, en los cuales hay un puesto vacío. Si interpretamos las probabilidades estacionarias como la fracción del tiempo que (en el largo plazo) el sistema se encuentra en un estado, entonces la fracción de clientes que usan el cajero será:

$$\text{Fracción} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

3. Siguiendo el mismo tipo de razonamiento vemos que (utilizando  $\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$ ):

$$P[\text{al llegar había 1 en } 2^{\text{a}} \text{ transacción}] = \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

4. Si lo encuentra en la segunda operación esperaran en promedio  $\frac{1}{\delta}$ .  
Si lo encuentran en la primera esperaran en promedio  $\frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta}$  (con probabilidad  $p$  debe esperar una segunda transacción).

5. Utilizando las partes anteriores y los resultados de la primera clase auxiliar del ramo:

$$E(\text{Espera}) = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} + \left[ \frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta} \right] \cdot \frac{\Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

6. La tasa efectiva de llegadas de clientes al sistema es

$$\lambda \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)$$

Ahora, si filtramos el proceso de llegada tendremos que los clientes que pagan solo  $b$  llegan con tasa:

$$\lambda \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) \cdot (1 - p)$$

y los que pagan  $2b$  llegan con tasa:

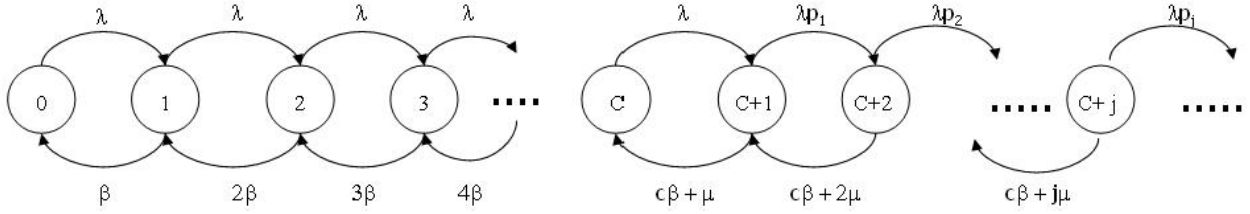
$$\lambda \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) \cdot p$$

Entonces las ganancias esperadas por hora (en el largo plazo) serán:

$$E[\text{Beneficios}] = \lambda \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) \cdot (1 - p) \cdot b + \lambda \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) \cdot p \cdot 2b$$

### Problema 3

1. Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



2. Al igual que en una cadena M/M/∞ solo necesitamos que  $\mu$  sea positivo, ya que la tasa de muerte es creciente y la de nacimiento está acotada por  $\lambda$ . Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \quad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

3. Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

- a) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora ( $\lambda$ ). Los casos favorables son los siguientes:

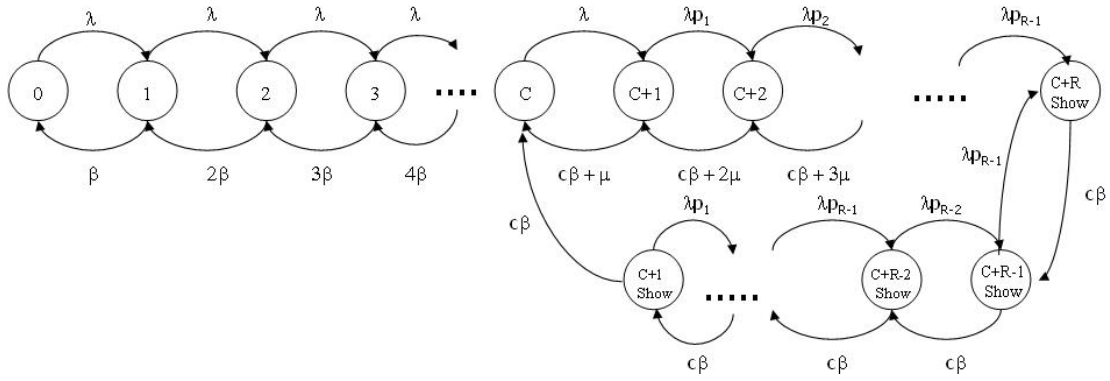
$$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

Entonces:

$$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

- b) Considerando a todos los clientes:  $\lambda$  (sin comentarios)  
Sin considerar a los que entran:  $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$ .

4. La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:



Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.

Dudas y/o errores:  
Jaime Gacitúa C.  
jgacitua@ing.uchile.cl