



Teoría de Colas / Nacimiento y Muerte

Martes 30 de Octubre de 2007

Problema 1, CTP Primavera 2002

A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro $\lambda(1/\text{min})$. Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}(\text{min})$.

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

1. (2,0 puntos) Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.
2. (2,0 puntos) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.
3. En función de las probabilidades estacionarias responda:
 - a) (0,5 puntos) El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.
 - b) (0,5 puntos) La probabilidad de que exista igual número de parejas baliando y sentadas en un instante cualquiera.
 - c) (1,0 puntos) La tasa media de ingreso de parejas a la pista.
 - d) (1,0 puntos) La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.

Problema 2

Considere un cajero automático al cual llegan clientes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/hora]. En el lugar donde se encuentra el cajero hay espacio para dos personas (una utilizando el cajero y otra esperando su turno). Si un cliente que llega encuentra que ya hay 2 personas ahí, se ve obligado a retirarse (buscará otro cajero).

Cuando un cliente accede al cajero realiza alguna operación financiera, la que toma un tiempo exponencialmente distribuido, con media $\frac{1}{\mu}$ [horas]. Una fracción $1 - p$ de los clientes se retira al terminar su primera operación, mientras que una fracción p de los clientes requiere una operación adicional, lo cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\gamma}$ [horas]. Nadie realiza más de 2 operaciones.

1. Modele el estado de ocupación del cajero como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley probabilidades estacionarias o de equilibrio. Plantee un sistema de ecuaciones a partir del cual se puedan obtener las probabilidades estacionarias.

2. Respecto del comportamiento de largo plazo de este sistema, conteste las siguientes preguntas.
 - a) ¿Qué fracción de los clientes que llegan con intenciones de usar el cajero logran su propósito?
 - b) Dado que un cliente logró utilizar el cajero, cuál es la probabilidad que al llegar haya encontrado el cajero ocupado por una persona que estaba realizando su segunda operación?
 - c) Suponga que usted llega al lugar donde se ubica el cajero y lo encuentra ocupado por otro cliente (y nadie más esperando). Si dicho cliente está realizando su segunda operación ¿cuál es el valor esperado del tiempo que ud. deberá esperar (en cola) antes de poder usar el cajero? ¿Y si el otro cliente está realizando su primera operación?
 - d) ¿Cuánto tiempo esperan en cola, en promedio, los clientes que logran utilizar el cajero?
3. Suponga que el banco que administra este cajero cobra b [\$] por cada operación realizada (un cliente que realiza 2 operaciones significa un ingreso de $2b$). Además, mantener el cajero funcionando en ese lugar tiene un costo de c [\$/hora]. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el cajero se autofinancie?

Problema 3

Don King, nuevamente requiere de nuestra ayuda para estudiar el sistema de atención de una de sus sucursales bancarias.

El banco cuenta con C cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Si al llegar una persona al banco, hay j clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad p_j , y en caso contrario, se va ($P_0=1$).

Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ [horas].

Además se sabe que cada la atención de cada uno de los cajeros, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$ [horas].

1. Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguiente preguntas:
 - a) ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al banco?
 - b) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?

Ahora suponga que la capacidad para personas en cola de igual a R (Asuma $p_R=0$). En el momento que el sistema se llena, Don Güilly, guardia del local, ágilmente se sube a un improvisado escenario dispuesto en el hall del banco, ha realizar una atrevida performance.

Según Don King, cuando el guardia est actuando, inhibe cualquier señal de aburrimineto por parte de los clientes. Don Güilly mantiene su show, mientras existan personas en cola.

4. Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en tiempo continuo.