Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: Ch. Araya, J. Gacitúa, D. Wilson, R. Wolf

Miércoles 17 de octubre

Problema 1

La oficina de Entrega de Certificados de una prestigiosa Escuela de Ingeniería, ha contratado una muy agraciada secretaria, la cual causa sensación dentro del alumnado masculino. Es por esto que se le ha encargado a ud. el estudio del sistema de atención con el que actualmente se opera.

En la oficina, sólo existe un puesto de espera, además del lugar que ocupa el estudiante que se está atendiendo. Los alumnos que llegan y encuentran, tanto a la secretaria como el lugar de espera ocupados, se retiran indignados.

Los estudiantes llegan a pedir certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [alumnos/hora]. Con probabilidad p un alumno es hombre, y con $1-p$, mujer.

La secretaria demora en la atención, un tiempo aleatorio que sigue una distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ para los hombres y $\frac{1}{\gamma}$ para las mujeres, con $\mu \leq \gamma$.

Además se sabe que las alumnas, víctimas de una irrefrenable envidia, están como máximo en el lugar de espera un tiempo que sigue una distribución exponencial de parámetro β, luego del cual se retiran furiosas, sin haber recibido la atención. Por otro lado si un estudiante hombre está en el puesto de espera, ni tonto ni perezoso, se queda en ese lugar hasta que la afamada secretaria se desocupe y le preste el servicio requerido.

1. Modele el estado de ocupación de la Oficina de Certificados como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y que el sistema lleva operando por "mucho tiempo", responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es la cantidad de alumnos (en total) que, en una hora, se retiran indignados al encontrar la oficina llena?
   b) Si un hombre llega y logra entrar al sistema, en promedio cuánto tiempo tendrá que esperar hasta ser atendido?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer se retire indignada del lugar de espera, antes de que termine la atención de la persona que está con la secretaria?

Problema 2

Cierta unidad académica dispone de 2 equipos de proyección *data show* que son utilizados para realizar presentaciones en actividades de docencia. Los equipos difieren en cuanto a la nitidez y potencia de la imagen que proyectan, siendo uno de ellos de alta calidad y otro de baja calidad. Los equipos son administrados por el Encargado de Sistemas.

Los profesores, auxiliares y alumnos solicitan los equipos en el momento que los necesitan para realizar una presentación. El Encargado de Sistemas ha observado que se reciben solicitudes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa α [solicitudes/hora]. Cuando una persona pide un data show se le entrega el mejor equipo disponible en ese momento. Si no hay equipos disponibles (ambos equipos han sido prestados a otros expositores) la solicitud es rechazada, y la persona que deseaba el data show se va desilusionada a realizar su presentación con medios menos sofisticados.

Una presentación tiene una duración aleatoria, exponencialmente distribuida con media $\frac{1}{\beta}$ [horas]. Al terminar su presentación el expositor devuelve el data show inmediatamente al Encargado de Sistemas.

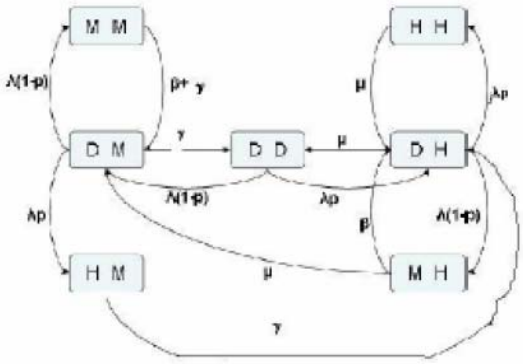
Se sabe además que el equipo de baja calidad falla ocasionalmente. El tiempo que permanece en operación hasta fallar es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con tasa γ [fallas/hora]. Cuando el equipo falla durante una presentación el expositor llama inmediatamente al Encargado de Sistemas, el cual envía el equipo a reparación. El accidentado expositor continua después su presentación como mejor pueda. Un equipo nunca falla cuando no está siendo utilizado. La reparación de un data show toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\delta}$ [horas]. Una vez reparado el equipo es recibido por el Encargado de Sistemas, quedando disponible para quien lo solicite.

1. Formule un modelo de Markov en tiempo continuo que describa la disponibilidad de equipos data show de alta y baja calidad. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionarias e indique cómo calcularlas (no es necesario que las calcule).
2. ¿Cuál es el número medio de solicitudes rechazadas por unidad de tiempo en el largo plazo? (responda en términos de las probabilidades estacionarias y los demás parámetros del problema).
3. ¿En el largo plazo, cuál es la fracción de su tiempo que son usados ?
4. Si a un expositor le acaban de prestar el data show de baja calidad, ¿cuál es la probabilidad que alcance a terminar su presentación sin que el equipo falle?

Solución

Problema 1

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



2. Tenemos una cadena irreducible y finita → Existen probabilidades estacionarias.
   Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\pi_{DD}\cdot\lambda &= \pi_{DM}\cdot\gamma+\pi_{DH}\cdot\mu\\
\pi_{DM}\cdot(\lambda+\gamma) &= \pi_{MM}\cdot(\beta+\gamma)+\pi_{DD}\cdot\lambda(1-p)+\pi_{MH}\cdot\mu\\
\pi_{MM}\cdot(\beta+\gamma) &= \pi_{DM}\cdot\lambda(1-p)\\
\pi_{HM}\cdot\gamma &= \pi_{DM}\cdot\lambda p\\
\pi_{DH}\cdot(\lambda+\mu) &= \pi_{HH}\cdot\mu+\pi_{DD}\cdot\lambda p+\pi_{MH}\cdot\beta+\pi_{HM}\cdot\gamma\\
\pi_{HH}\cdot\mu &= \pi_{DH}\cdot\lambda p\\
\pi_{MH}\cdot(\beta+\mu) &= \pi_{DH}\cdot\lambda(1-p)\\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

3. Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

   a) Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma (λ), tendremos que:

$$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

   b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

   c) Si la persona que esta antes que ella (atendiendcse) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta + \mu}$$

   Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\gamma}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

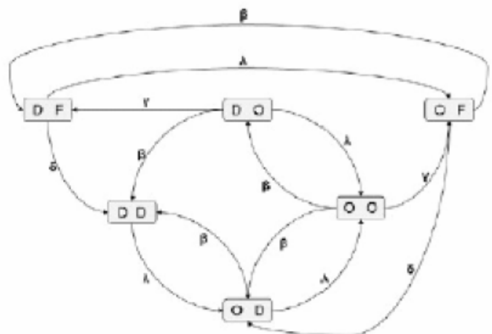
$$\frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

   Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular.

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Problema 2

1. La cadena asociada al problema se muestra en la figura.



En esta cadena, la primera coordenada indica el estado de ocupación del equipo de alta calidad y la segunda el estado del equipo de baja calidad.

La cadena ilustrada es irreducible y finita, por lo que podemos asegurar que existirá una ley de probabilidades estacionarias. Las ecuaciones necesarias para su cálculo son las siguientes (ecuaciones de balance):

$$
\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{OD} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \beta + \pi_{DF} \cdot \delta \\
\pi_{OD} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_{DD} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \beta + \pi_{OF} \cdot \delta \\
\pi_{OO} \cdot (2 \cdot \beta + \gamma) &= \pi_{OD} \cdot \lambda + \pi_{DO} \cdot \lambda \\
\pi_{DO} \cdot (\lambda + \beta + \gamma) &= \pi_{OO} \cdot \beta \\
\pi_{OF} \cdot (\delta + \beta) &= \pi_{DF} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \gamma \\
\pi_{DF} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{OF} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \gamma \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

2. Para responder esta pregunta debemos identificar los estados en los cuales se rechazan solicitudes, interpretar las probabilidades estacionarias como fracción en el largo plazo que el sistema se encuentra en un estado y identificar la tasa efectiva de rechazos para cada estado. Con esto tendremos que:

$$E[\text{Rechazos}] = \pi_{OO} \cdot \lambda + \pi_{OF} \cdot \lambda$$

3. Nuevamente interpretamos las probabilidades estacionarias como fracción del tiempo que se permanece en un estado en el largo plazo. Entonces:

$$\text{Tasa equipo alta calidad} = \pi_{OD} + \pi_{OO} + \pi_{OF}$$

y

$$\text{Tasa equipo baja calidad} = \pi_{DO} + \pi_{OO}$$

4. Independiente del estado del sistema la distribución del tiempo de falla y de duración de la presentación se mantienen invariantes. Entonces la pregunta es ¿cuál es la probabilidad que el valor de una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro β sea menor al valor de una de distribución exponencial de parámetro γ. Llamando a esta probabilidad P tendremos que:

$$P = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$