



Solución Auxiliar Viernes 26 de Octubre

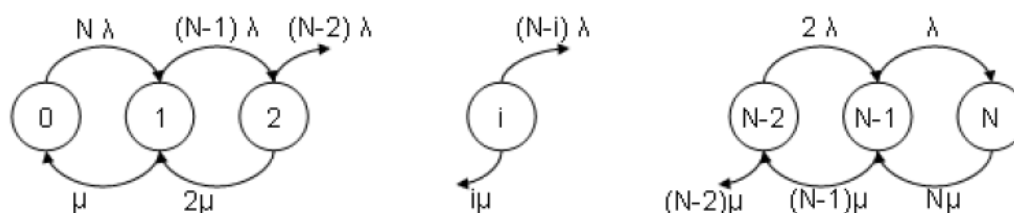
Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Problema 1

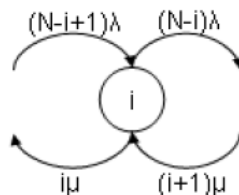
- Los estados del sistema quedan definidos como:

(i) : Número de demócratas en el sistema.

De esta forma la cadena queda de la siguiente forma



Para un estado en particular donde existen i demócratas se tendrá que la transición entre el estado i y el $i + 1$ ocurre cuando alguno de los $N - i$ republicanos decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $(N - i) \cdot \lambda$. De la misma forma la transición entre el estado i y el $i - 1$ ocurre cuando alguno de los i demócratas decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $i \cdot \mu$.



Dado que el proceso anterior es de nacimiento y muerte se pueden aplicar las fórmulas para las probabilidades estacionarias.

$$\begin{aligned}\pi_i &= \prod_{k=1}^i \left(\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) \cdot \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_i &= \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \dots (N-i) \cdot \lambda^i}{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_i &= \frac{N! \cdot \lambda^i}{(N-i)! \cdot i! \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 = \binom{N}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \cdot \pi_0\end{aligned}$$

donde $\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$ se encuentra ocupando el binomio de Newton y que la suma de las probabilidades estacionarias es 1.

2. De esta manera, la probabilidad de que los demócratas ganen las elecciones será igual a encontrarse en algún estado con más demócratas que republicanos, es decir:

$$\sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N \pi_i \text{ ó } \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^N \pi_i$$

En caso de que N sea par o impar respectivamente. Notar que en el caso par si el número de votantes demócratas es $\frac{N}{2}$ la elección se empata.

3. si $\lambda = \mu \Rightarrow \pi_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

De esta manera $\pi_k = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \sim B(N, \frac{1}{2})$

En el largo plazo, dado que una persona se cambia de partido con probabilidad $\frac{1}{2}$ tener, por ejemplo, 20 personas de N votando por el partido demócrata es equivalente a tirar N veces una moneda y contar 20 sellos.

Por esto la probabilidad de ganar será $\frac{1}{2}$ en el caso de N impar, mientras que si N es par como existe alguna probabilidad de empatar debemos pensar en

$$2 \cdot P(\text{ganar}) + P(\text{empatar}) = 1$$

donde la probabilidad de empatar viene dada por:

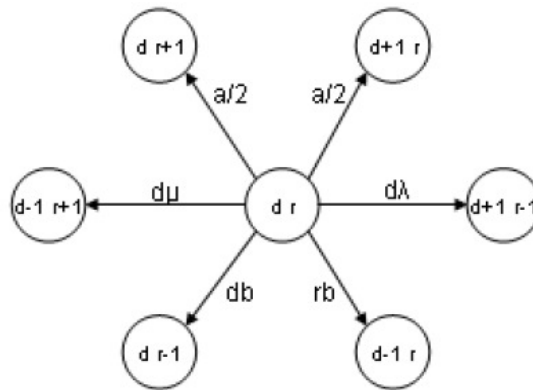
$$P(\text{empatar}) = \binom{\frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

4. Cuando permitimos que el número de personas cambie vía nacimientos y muertes la cadena de la parte anterior ya no sirve puesto que es necesario saber no sólo el número de demócratas sino la cantidad total de votantes.

Una manera de modelar esta situación es utilizando una cadena de Markov continua con pares ordenados en cada nodo, que representen el número de demócratas y el número de republicanos respectivamente (D, R) .

De esta manera, la población total será $N = D + R$ y las transiciones serán las que se muestran en el grafo. En estos casos la probabilidad de que los demócratas ganen una elección en el largo plazo será igual a,

$$\sum_{i>j} \pi_{(i,j)}$$



Problema 2

1. La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura 1.

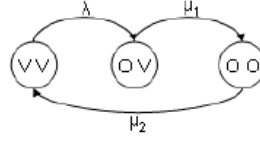


Figura 1: Cadena problema 1-1

2. Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la cadena es la mostrada en la figura 2.

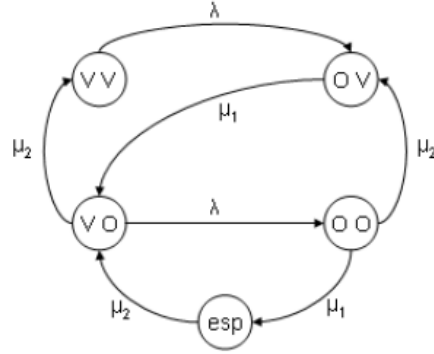


Figura 2: Cadena problema 1-2

3. Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
 \Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
 \Pi_{VO}(\lambda + \mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
 \Pi_{OO}(\mu_1 + \mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
 \Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
 \sum_i \Pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

4. Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

5. Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2 \cdot \Pi_{OO} + 2 \cdot \Pi_{Esp}$$

6. Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}$$

Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.

Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \Pi_{VV} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] + \Pi_{VO} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2} \right]$$