Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: Ch. Araya, J. Gacitúa, D. Wilson, R. Wolf

Auxiliar Viernes 26 de Octubre

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Problema 1

En Estados Unidos existen dos partidos políticos que concentran la gran mayoría de las preferencias electorales (alrededor del 95 %): el partido demócrata y el republicano. Por lo tanto, supondremos que la gente sólo vota por alguno de estos dos partidos.

Se sabe que la población electoral norteamericana es bastante flexible y ocasionalmente cambia sus preferencias electorales, de acuerdo a las circunstancias. Por ello, supondremos que un votante republicano (que vota por ese partido) cambiará su preferencia, pasando a ser un votante demócrata en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\lambda}$. Por su parte, un votante demócrata pasara a ser un votante republicano en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$. Suponga que el total de la población electoral de Estados Unidos es de tamaño N.

1. Modele la dinámica de la población electoral de Estados Unidos (el número de votantes demócratas en cada instante) como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el diagrama de estados con las tasas de transición respectivas.

2. Calcule las probabilidades estacionarias. ¿Cuál es la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata en el largo plazo? Suponga que el número total de votantes es N.

3. Para el caso $\lambda = \mu$, muestre que la distribución de las probabilidades estacionarias es binomial de parámetros N, $1/2$. Interprete el resultado. Entregue la esperanza del número de votantes demócratas en el largo plazo y la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata.

4. (**Propuesto**) En el mismo modelo anterior ahora sabemos que una persona nace independiente de todo lo demás, de acuerdo a un tiempo aleatorio exponencialmente distribuida de media $\frac{1}{a}$. De la misma manera una persona muere de acuerdo a un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{b}$. Si cada individuo que nace tiene iguales posibilidades de ser republicano o demócrata, modele la situación anterior como una cadena de Markov de tiempo continuo.

Problema 2

Usted ha decidido instalarse con un negocio para lustrar zapatos. El establecimiento consta de dos sillas. En la silla 1 los zapatos del cliente son limpiados y embetunados, para luego pasar a la silla 2, donde se les saca el brillo. Los tiempos de servicio en las dos sillas son variables aleatorias independientes, exponencialmente distribuidas de tasas μ_1 y μ_2 respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa λ y que el cliente sólo entra al establecimiento si las dos sillas están desocupadas.

1. Modele el problema anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo.

   Suponga que ahora un ayudante es contratado y cada uno trabaja en una silla. Considere el mismo problema anterior, pero ahora un cliente potencial entra al negocio si la silla 1 está vacía. Cuando el trabajo en la silla 1 se termina, pasa a la silla 2 si está vacía o espera en la 1 hasta que la 2 se desocupe.

2. Modele el nuevo problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Por qué puedría hacerlo ?.
3. ¿Qué proporción de clientes potenciales entran al establecimiento ?.
4. ¿Cuál es la tasa promedio de entrada de clientes al negocio ?.
5. ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro del negocio ?.
6. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un cliente que entra al local, dentro de éste?.