

IN44A: Investigación Operativa

Prof. : Pablo Rey, Rafael Epstein

Aux. : Jaime Gacitúa, Daniel Wilson,
Rodrigo Wolf

Coord. : Christian Araya

Pauta Auxiliar – Miércoles 3 de octubre 2007

Pregunta 1

1. La probabilidad que la próxima llamada recibida sea por la línea directa del LOCAL A es igual a $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \mu}$.
2. La probabilidad que una llamada cualquiera sea para el LOCAL A es igual a $\frac{\lambda_A + p\mu}{\lambda_A + \lambda_B + \mu}$.
3. En una hora cualquiera, se reciben, en promedio, $\lambda_A + \lambda_B + \mu$ llamadas en total.
4. Sea X el número de llamadas derivadas al LOCAL A. La distribución de X condicionada en que han pasado exactamente k llamados por la central está dada por:

$$P(X = n) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } 0 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

5. Sea Y el número total de llamadas al LOCAL A. La distribución de Y condicionada en que han pasado exactamente k llamados por la central está dada por:

$$P(Y = m) = \sum_{n=\max\{0, m-k\}}^{\min\{k, m\}} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda_A t} (\lambda_A t)^{m-n}}{(m-n)!}.$$

6. Para calcular esta probabilidad condicionamos en cuales llamadas por la central van dirigidas al local A. Denotaremos las llamadas como llamada 1 y llamada 2, sin considerar el orden en que llegan. El tiempo de llegada de la llamada i es la variable aleatoria T_i ($i = 1, 2$). El instante de llegada de la llamada directa es S . Las tres variables aleatorias S , T_1 y T_2 tienen distribución uniforme en $[0, t]$ y son independientes entre sí.

Tenemos cuatro casos:

Caso 1: Ninguna de las llamadas por la central va al local A. En este caso, la única llamada al local A es la llamada directa y entonces el tiempo de llegada es igual a S . Por lo tanto la función de distribución de T condicionada es:

$$F_T(x|\text{Caso 1}) = F_S(x) = \frac{x}{t}.$$

Caso 2: Sólo la llamada 1 va al local A. En este caso, T es igual al mínimo de T_1 y S . Por lo tanto la función de distribución de T condicionada es:

$$\begin{aligned}
 F_T(x|\text{Caso 2}) &= P(T \leq x) \\
 &= P(S \leq x \text{ y } T_1 \leq x) \\
 &= P(S \leq x \text{ o } (S < x \text{ y } T_1 \leq x)) \\
 &= F_S(x) + (1 - F_S(x))F_{T_1}(x) \\
 &= \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2}.
 \end{aligned}$$

Caso 3: Sólo la llamada 2 va al local A. Este caso es similar al caso 2 y vale que:

$$F_T(x|\text{Caso 3}) = \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2}.$$

Caso 4: Ambas llamadas por la central van al local A. Este caso se puede obtener de manera análoga a los anteriores que:

$$F_T(x|\text{Caso 4}) = \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} + \frac{(t-x)^2x}{t^3}.$$

Con estos valores podemos calcular

$$\begin{aligned}
 F_T(x) &= F_T(x|\text{Caso 1})P(\text{Caso 1}) + F_T(x|\text{Caso 2})P(\text{Caso 2}) \\
 &\quad + F_T(x|\text{Caso 3})P(\text{Caso 3}) + F_T(x|\text{Caso 4})P(\text{Caso 4}) \\
 &= \frac{x}{t}(1-p)^2 + 2\left(\frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2}\right)p(1-p) + \left(\frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} + \frac{(t-x)^2x}{t^3}\right)p^2.
 \end{aligned}$$

Pregunta 2

1. La probabilidad que r pacientes sean dados de alta condicionada a que hay i pacientes para la revisión es igual a

$$\alpha_{ir} = \begin{cases} \binom{i}{r} p^r (1-p)^{i-r} & \text{si } 0 \leq r \leq i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. La probabilidad que haya j pacientes para la revisión condicionada a que había s pacientes internados luego de la revisión del día anterior es igual a

$$\beta_{sj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < s, \\ q_{j-s} & \text{si } s \leq j < C, \\ \sum_{t=C-s}^{\infty} q_t & \text{si } j = C, \end{cases}$$

3. (1,0 pto.) Llamemos p_{ij} a la probabilidad que si una mañana cualquiera (antes de las revisiones) hay i pacientes en el centro, a la mañana siguiente el médico encuentre j pacientes para revisar. Entonces,

$$p_{ij} = \sum_{k=0}^i \alpha_{i,k} \beta_{i-k,j}.$$

4. (2,0 pto.) Una cadena que modela el sistema tiene como estados el número de pacientes internados a la hora de la revisión. Es decir, el conjunto de estados $E = \{0, 1, 2, \dots, C\}$. Las probabilidades de transición están definidas por las p_{ij} definidas en el punto 3.

La cadena tiene una sola clase de estados que es recurrente y aperiódica.

5. (1,0 pto.) La nueva cadena tiene el mismo conjunto de estados. Sus probabilidades de transición están dadas por:

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } j < i, \\ \sum_{k=i}^C p_{ik} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

6. Sí se puede afirmar ya que la cadena tiene como único estado recurrente al 0, lo que implica la cadena tiene probabilidades estacionaria y que $\pi_0 = 1$. Es decir, con probabilidad 1, el recinto quedará vacío.

7. Llamando T al número de días que hay que esperar hasta que el pabellón de internación se vacía, se puede afirmar que $E[T]$ es finita.

Una manera de acotar $E[T]$ es considerar una cadena con los mismos estados que la cadena del punto 5 pero cuyas probabilidades de transición sean:

$$p_{ij}^* = \begin{cases} p'_{ij} & \text{si } j = i - 1, \\ 1 - p'_{ij} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Sea T^* el número de transiciones que se demora en esta cadena para ir del estado M al estado 0. No es difícil convencerse que $E[T] \leq E[T^*]$: un argumento intuitivo es que sólo estamos dejando salir los pacientes de a uno, mientras que en el caso que nos interesa pueden ser dados de alta varios pacientes el mismo día.

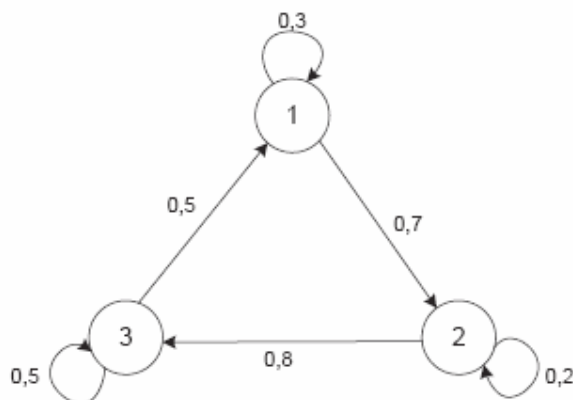
Sea T_i el número de transiciones que se demora en esta cadena para ir del estado i al estado $i-1$. Estas variables aleatorias tienen distribución geométrica y por lo tanto su esperanza es finita. Entonces,

$$E[T^*] = \sum_{i=1}^M E[T_i]$$

es finita, y por lo tanto, $E[T]$ también es finita.

Pregunta 3

1. El comportamiento del animal puede ser modelado con la cadena que se muestra en la figura. El estado i corresponde a un día que el animal se alimenta en el sector i .



2. Suponemos que el animal está en el sector 1.

a) La probabilidad que en tres días más esté en el sector 3 puede ser calculada como $(P^3)_{13}$. Como

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,307 & 0,133 & 0,560 \\ 0,400 & 0,288 & 0,312 \\ 0,245 & 0,350 & 0,405 \end{bmatrix}$$

la probabilidad solicitada es igual a 0,56.

b) Para llegar exactamente en tres transiciones por primera vez del estado 1 al estado 3 hay que realizar una transición del estado 1 al 2, una del estado 2 al 3 y haber permanecido por una transición en el estado 1 o en el estado 2. Por lo tanto, la probabilidad que queremos calcular es igual a $(0,3 + 0,2) \times 0,7 \times 0,8 = 0,28$.

c) La cadena del punto 1. admite probabilidades estacionarias ya que es finita y ergódica. Sus probabilidades estacionarias se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,3\pi_1 + 0,7\pi_2 \\ \pi_2 &= 0,2\pi_1 + 0,8\pi_2 \\ \pi_3 &= 0,5\pi_1 + 0,5\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

Las probabilidades estacionarias son iguales a:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 40/131 = 0,30 \\ \pi_2 &= 35/131 = 0,27 \\ \pi_3 &= 56/131 = 0,43 \end{aligned}$$

d) La fracción de días que el animal debe desplazarse es igual a

$$\sum_{i=1}^3 \pi_i(1 - p_i) = 0,3 \times 0,7 + 0,27 \times 0,8 + 0,43 \times 0,5 = 0,21 + 0,216 + 0,215 = 0,641 .$$