

Clase auxiliar: Miércoles 3 de octubre de 2007

Problema 1

Una pizzería que hace repartos a domicilio cuenta con dos locales: LOCAL A y LOCAL B. Estos locales atienden a dos sectores A y B de la ciudad. Dependiendo a que zona pertenece el cliente, su pedido es satisfecho por el local correspondiente.

Los pedidos son recibidos vía telefónica y cada local cuenta con un número directo al que pueden llamar los clientes del sector. Los pedidos recibidos de esta manera por el LOCAL A pueden ser representados por un proceso de Poisson de tasa λ_A [pedidos/hora]. Análogamente, los pedidos recibidos por la línea directa en el LOCAL B pueden ser representados por un proceso de Poisson de tasa λ_B [pedidos/hora].

Además, los clientes pueden llamar a una CENTRAL AUTOMÁTICA. Cuando un cliente llama a la central, es atendido por una máquina que le pregunta en qué sector debe ser entregado el pedido. Automáticamente, el sistema deriva la llamada al local correspondiente. Los pedidos recibidos de esta manera pueden ser representados por un proceso de Poisson de tasa μ [pedidos/hora]. Se sabe, que independiente de todo lo demás, un llamado vía la central, es del sector A con probabilidad p y del sector B con probabilidad $1 - p$.

Las llamadas recibidas por cada vía son independientes entre sí.

Suponga que se cuenta con un número de líneas y personal suficientes que se puede considerar que siempre hay línea y telefonista disponibles para atender los llamados. Suponga también que el tiempo que demora en ser derivada una llamada es despreciable.

1. (0,5 pts.) En un momento cualquiera, ¿cuál es la probabilidad que la próxima llamada recibida sea por la línea directa del LOCAL A?
2. (0,5 pts.) En un momento cualquiera, ¿cuál es la probabilidad que una llamada cualquiera sea para el LOCAL A?
3. (0,5 pts.) ¿Cuál es el número promedio de llamadas recibidas en total en una hora cualquiera?
4. (1,0 pts.) Si en un lapso de t horas han pasado exactamente k llamados por la central, ¿cuál es la distribución del número de llamadas derivadas al LOCAL A en ese tiempo?
5. (1,5 pts.) Si en un lapso de t horas han pasado exactamente k llamados por la central, ¿cuál es la distribución del número de llamadas totales al LOCAL A ese intervalo del tiempo?
6. (2,0 pts.) Suponga que en un lapso de t horas se han recibido dos llamadas pasando por la central y una directa al LOCAL A. Sea T el instante en que llega la primera llamada al local A ¿cuál es la distribución de probabilidades de T ?

Problema 2

Un centro hospitalario dispone de C camas para sus pacientes internados. Cada mañana, un médico evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y ser dado de alta y una probabilidad $1 - p$ de requerir un día más de internación, independiente de lo que ocurra con el resto de los pacientes y de los días que lleve internado. Además, se sabe que todo paciente que ingresa al centro debe permanecer al menos una noche antes de ser dado de alta. Considere que las camas ocupadas por los pacientes dados de alta se encuentran disponibles inmediatamente después de la revisión por el médico.

Se sabe que el número de pacientes que llega cada día es incierta, pero se sabe que, en un día cualquiera, llegarán k pacientes con probabilidad q_k ($k \in \{0, 1, 2, \dots\}$). Como el centro cuenta con un número limitado de camas, los pacientes que encuentran el hospital lleno, son derivados a otros centros.

1. (0,5 ptos.) Si una mañana cualquiera (antes de las revisiones) hay i pacientes en el centro, ¿cuál es la probabilidad que r de esos pacientes sean dados de alta ese mismo día? Denote estas probabilidades por α_{ir} .
2. (0,5 ptos.) Si una mañana cualquiera (luego de las revisiones) quedan s pacientes internados ¿cuál es la probabilidad que a la mañana siguiente el médico encuentre j pacientes para revisar? Denote estas probabilidades por β_{sj} .
3. (1,0 pto.) Si una mañana cualquiera (antes de las revisiones) hay i pacientes en el centro, ¿cuál es la probabilidad que a la mañana siguiente el médico encuentre j pacientes para revisar?
4. (2,0 ptos.) Modele el número de pacientes internados que debe revisar cada día el médico como una cadena de Markov en tiempo discreto. Defina claramente los estados y determine las probabilidades de transición. Identifique las clases de estados y diga son transientes o recurrentes.

Considere que en el hospital se desean instalar nuevos equipamientos, pero para esto se requiere que el sector de internaciones esté completamente vacío. Para esto se ha decidido seguir atendiendo los pacientes que actualmente se encuentran en el recinto hasta su alta, pero no se recibirán nuevos pacientes hasta que se instalen los equipos.

4. (1,0 pto.) Modifique la cadena del punto anterior para representar la nueva situación.
5. (0,5 ptos.) Suponga que inicialmente se tiene M clientes internados ¿Se puede garantizar que en algún momento se podrá realizar la instalación de los equipos? Justifique.
6. (0,5 ptos.) Llamemos T al número de días que deberán esperar hasta que el pabellón de internación se vacíe, ¿ $E[T]$ es finita? Justifique.

Problema 3

Un animal salvaje puede conseguir su alimento en tres sectores de su hábitat. Por simplicidad, los llamamos SECTOR 1, SECTOR 2 y SECTOR 3. Se sabe que el animal permanecerá en el sector que se encuentre mientras consiga alimento. Si un día no consigue alimento en el sector que se encuentra, se dirigirá a otro. Por observaciones realizadas, se ha comprobado que siempre que el animal se desplaza, encuentra alimento en el nuevo sector al que se dirige. Por otro lado, se sabe que si se encuentra en el sector i ,

encontrará alimento, y por lo tanto permanecerá un día más allí con probabilidad p_i . Estas probabilidades son conocidas y toman los valores $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,5$. Además se sabe que, cuando se desplaza, lo hace del sector 1 al sector 2, de éste al sector 3 y del sector 3 al sector 1.

1. (2,0 pts.) Modele el comportamiento del animal como una cadena de Markov en tiempo discreto. Defina claramente los estados y determine las probabilidades de transición.
2. Suponga que un día cualquiera, el animal se encuentra en el sector 1.
 - a) (0,5 pts.) Calcule la probabilidad que en 3 días más el animal esté en el sector 3.
 - b) (1,0 pts.) Calcule la probabilidad que la primera vez que el animal llegue al sector 3 suceda dentro de exactamente 3 días.
3. (2,0 pts.) Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y calcúlelas.
4. (0,5 pts.) Calcule la fracción de días que el animal debe desplazarse para conseguir alimento.