Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs.: R. Epstein, P. Rey
Aux.: C. Araya, T. Correa, J. Gacitúa,
L. Reus, R. Wolf

Solución Control 2
11 de Mayo de 2007

Problema 1

Considere un servicio de buses. Los buses pasan por el paradero en cuestión de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ buses por hora. Los pasajeros llegan al paradero siguiendo un proceso de Poisson de tasa μ pasajeros por hora. Ambos procesos son independientes entre sí. Además, el paradero es suficientemente grande para albergar a todos los usuarios que lleguen.

1. En una primera aproximación, considere que los buses tienen capacidad infinita (es decir son sufientemente grandes para llevar todos los pasajeros que estén esperando en el paradero). Bajo este supuesto,

   a) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en un bus cualquiera se suban n pasajeros?

Sea X_i el tiempo entre llegadas de pasajeros, y Y el tiempo en que llegará el siguiente bus. $X_i \to \exp(\mu)$ e $Y \to \exp(\lambda)$.

Supongamos que acaba de pasar un bus, y el paradero está vacío. Para que haya n personas a la llegada del bus, se pide que "las personas" ganen la carrera de exponenciales n veces consecutivas, y luego el bus debe ganar la carrera (n+1)-ésima. La probabilidad que una persona llegue antes que el bus es $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, luego la probabilidad que se pide es,

$$P(n_pasajeros) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Otra forma de responder podría ser tomar el proceso N(t) como el proceso de llegada de gente al paradero, luego que ha pasado un bus. Se podría calcular entonces,

$$\begin{aligned} P(n_pasajeros) &= P(N(Y)=n) \\ &= \int_0^\infty P(N(t)=n \mid Y=t)\cdot P(Y=t) \\ &= \int_0^\infty \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}\lambda e^{-\lambda t}\,dt \end{aligned}$$

Integrando repetidamente por partes se llega a la misma solución. Se recomienda de todas formas intentar recoger la intuición de la primera forma para ahorrar tiempo.

   b) (1,5 ptos.) Utilizando el resultado del punto anterior, calcule el número esperado de pasajeros que se subirán a un bus cualquiera. Interprete el resultado.

El número esperado de pasajeros se saca utilizando la definición de esperanza,

$$E(numero.de.pasajeros) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n_pasajeros)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Ocupando el resultado conocido cuando $|a| < 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot a^i = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Se puede despejar la expresión, para llegar finalmente a

$$E(numero.de.pasajeros) = \frac{\mu}{\lambda}$$

La esperanza es directamente proporcional a la tasa de llegada de gente, e inversamente proporcional a la tasa de llegada de buses. Tiene sentido que si la tasa de llegada de gente (μ) aumenta en relación a λ, la cantidad esperada de gente que recogerá el bus aumenta.

2. Considerando un caso más realista, suponga que los buses tienen capacidad para llevar C pasajeros y llegan vacíos al paradero en consideración. Suponga además, que los usuarios que están esperando un bus y no consiguen subirse no esperan el siguiente bus sino que eligen otro medio alternativo de locomoción. Bajo estos nuevos supuestos,

   a) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en un bus cualquiera se suban n pasajeros?

Ahora, la cantidad de personas que se pueden subir a un bus puede ser a lo máximo C. Se separa entonces P(n pasajeros) en tres casos:

1. Caso $n \in \{0,...,C-1)$

   La probabilidad tomará la misma forma que en la parte anterior:

$$P(n_pasajeros) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

2. Caso $n = C$

   Si llegan C o más personas la cantidad de pasajeros que se suben al bus será siempre C. Como el paradero tiene capacidad infinita, debemos sumar la probabilidad de todos los casos que el bus se llena.

$$P(C_pasajeros) = \sum_{n=C}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

3. Caso $n > C$

$$P(n_pasajeros) = 0$$

b) (1,5 ptos.) Utilizando el resultado del punto anterior, calcule el número esperado de pasajeros que se subirán a un bus cualquiera. Interprete el resultado.

La esperanza nuevamente se calcula por definición, esta vez, separamos la sumatoria para los distintos casos,

$$E(numero.de.pasajeros) = \sum_{n=0}^{C-1} n \cdot P(n_pasajeros) + C \cdot P(C_pasajeros) + \sum_{n=C+1}^{\infty} n \cdot P(n_pax)$$

$$= \sum_{n=0}^{C-1} n \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + C\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$= \sum_{n=0}^{C-1} n \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \sum_{n=c}^{\infty}(C-n+n)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^c - \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^c \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-c} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^c \sum_{n=0}^{\infty}(n)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^c \cdot \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^c\right]$$

El resultado guarda sentido respecto a la parte anterior, porque se obtiene un número esperado de pasajeros menor. La media de la parte anterior es multiplicada por un coeficiente menor a uno, dependiente de C. Si C=0, la esperanza se anula (cero capacidad) y si $C \to \infty$, la esperanza toma la misma forma que la parte anterior.