

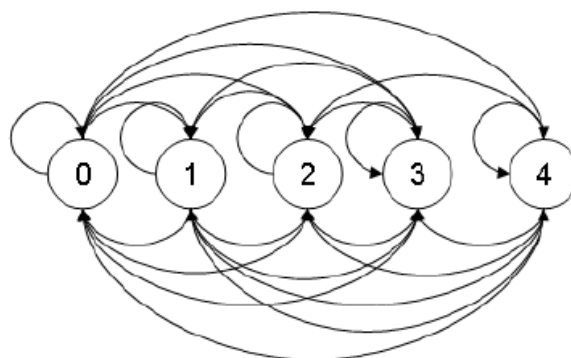


Solución Auxiliar Martes 25 de Septiembre

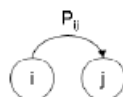
Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1

- Primero veamos cuál es el grafo para el caso reducido ($s=2$ y $S=4$), el cual se muestra en la figura.



La idea del ejemplo es ver que el número de transiciones es tal que no tiene sentido hacer el grafo. La idea entonces es identificar cada transición mediante la probabilidad de ocurrencia. La cadena para el caso general se muestra en la figura.



Donde:

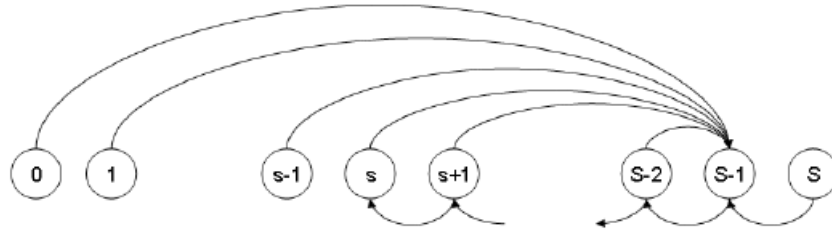
$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > s \text{ y } j > i \\ \alpha_{i-j} & \text{si } i > s \text{ y } 0 < j \leq i \\ \sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k & \text{si } i > s \text{ y } j = 0 \\ \alpha_{S-j} & \text{si } i \leq s \text{ y } 0 < j \leq S \\ \sum_{k=S}^{\infty} \alpha_k & \text{si } i \leq s \text{ y } j = 0 \end{cases}$$

- La cadena es exactamente la misma, sólo que los α_k toman valores específicos. Éstos son los siguientes:

$$\alpha_k = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

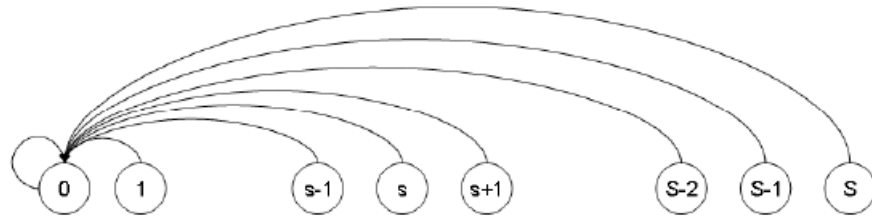
No es difícil ver que todos los estados están comunicados entre sí y que forman una única clase y dado que la cadena es finita, esta clase es recurrente (claramente cada estado es aperiódico dado que $p_{ii} \neq 0 \forall i$).

- En este caso sí podemos visualizar la cadena como un todo, puesto que el número de transiciones es muy bajo. La cadena se muestra en la figura.



De la figura vemos que los estados 0 al $s-1$ más el estado S son transientes y dado que no están comunicados entre sí cada uno por sí solo constituye una clase transiente. Por otro lado los estados del s al $S-1$ están comunicados entre sí y forman una clase recurrente (con seguridad después de $S-s-1$ pasos volveremos a cualquiera de los estados de esta clase). Por otro lado el periodo de los estados de la clase recurrente es $S-s$, dado que existe sólo una forma de volver a un estado partiendo del mismo, y eso ocurre con seguridad después de $S-s$ etapas.

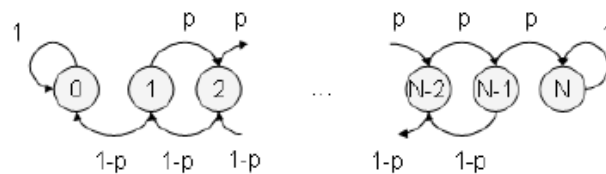
4. La cadena se muestra en la figura.



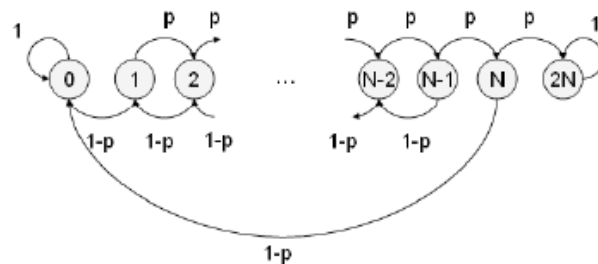
Vemos que existe un único estado recurrente, que forma por sí solo una clase recurrente. Todos los otros estados no están comunicados entre sí y conforman por sí solos clases transientes.

Problema 2

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con } i \text{ unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N - 1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1 - p) \cdot f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \quad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

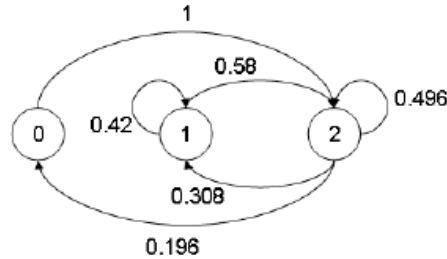
$$f_N - f_1 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i \right) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = \left(\sum_{k=0}^{i-1} \rho^k \right) \cdot f_1 = \frac{1 - \rho^i}{1 - \rho^N}$$

Problema 3

1. Es posible dado que el número de autos disponibles al comienzo de un día cualquiera sólo depende de la cantidad de autos disponibles al comienzo del día anterior y esto es suficiente para determinar la evolución del sistema (en probabilidades).
2. La cadena toma se muestra en la figura.



Cálculo de las probabilidades de transición:

$$\begin{aligned}
 P_{0,2} &= 1 \quad (\text{Si no tengo taxis disponibles con seguridad ambos estarán disponibles mañana}). \\
 P_{1,2} &= [P(D=1) + P(D \geq 2)] \cdot P[\text{No falle}] + P(D=0) = 0,58 \\
 P_{1,0} &= 0 \quad (\text{Por lo menos tengo bueno, la mañana siguiente, el auto en reparación}) \\
 P_{1,1} &= 1 - 0,58 = 0,42 \\
 P_{2,0} &= P(D \geq 2) \cdot P[\text{Ambos autos fallen}] = 0,196 \\
 P_{2,1} &= P(D=1) \cdot P[\text{Auto falle}] + 2 \cdot P(D \geq 2) \cdot P[\text{Uno falla y el otro no}] = 0,308 \\
 P_{2,2} &= P(D=0) + P(D=1) \cdot P[\text{Auto no falle}] + P(D \geq 2) \cdot P[\text{No falle ninguno}]
 \end{aligned}$$

Entonces la matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,42 & 0,58 \\ 0,196 & 0,308 & 0,496 \end{vmatrix}$$

Existe sólo una clase recurrente aperiódica compuesta por todos los estados de la cadena.

3. Dado que la cadena es ergódica existirá una ley de probabilidades estacionarias.
Esta ley debe cumplir con los siguientes requisitos:

$$\begin{vmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,42 & 0,58 \\ 0,196 & 0,308 & 0,496 \end{vmatrix}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \quad \forall i$$

Resolviendo se obtiene que $\pi_0 = 0,11$, $\pi_1 = 0,31$ y $\pi_2 = 0,58$.

4. a)

$$\begin{aligned} E[\text{Número de arriendos}] &= 1 \cdot \pi_1(P(D = 1) + P(D \geq 2)) \\ &\quad + 2 \cdot \pi_2(P(D \geq 2)) \\ &\quad + 1 \cdot \pi_2 \cdot P(D = 1) \\ &= 0,766 \end{aligned}$$

b)

$$E[\text{Costo}] = [2 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1] \cdot 10000 = 5300$$

c) El precio mínimo satisface la siguiente relación:

$$P^* \cdot E[\text{Número de arriendos}] = E[\text{Costo}] \Rightarrow P^* = 6919$$