Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: Ch. Araya, J. Gacitúa, D. Wilson, R. Wolf

Auxiliar Martes 25 de Septiembre

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1

Una tienda vende un único producto, del cual mantiene inventarios en una bodega. Al comenzar cada semana el gerente observa el inventario disponible en bodega, I. Si $I \leq s$ entonces el gerente pide $S - I$ unidades al proveedor $(0 < s < S)$, de manera de quedar con S unidades en bodega. El pedido es recibido de inmediato. Si $I > s$ el gerente no hace un pedido esa semana.

Las demandas en cada semana son variables aleatorias iid. En una semana cualquiera la demanda es de k unidades con probabilidad α_k $(k \geq 0)$. La demanda insatisfecha se pierde.

1. Muestre que el nivel de inventarios al comienzo de cada semana (antes de hacer el pedido) se puede modelar como una cadena de Markov. Indique claramente cuáles son los estados que ha definido y calcule las probabilidades de transición. Dibuje el grafo representante para el caso $s = 2, S = 4$.

En lo que sigue considere $0 < s < S$ arbitrarios.

2. Suponga que la llegada de clientes a la tienda queda bien descrita por un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/semana], y que cada cliente compra una unidad. Indique cuánto valen los valores $\{\alpha_k\}_{k\geq 0}$ en este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos de acuerdo a si son transientes o recurrentes y calcule su periodicidad.
3. Suponga ahora que la demanda es determinística e igual a 1 unidad en cada semana (i.e. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_k = 0 \, \forall k \neq 1$). Dibuje el grafo representante para este caso (note que la bodega puede comenzar con menos de s unidades). Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.
4. Suponga ahora que la demanda en cada semana es mayor que S con seguridad (es decir, $\alpha_k = 0 \forall k \leq S$). Dibuje el grafo representante para este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periodicidad.

Problema 2

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1 - p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de i, $1 < i < N$ y juega hasta que pierde todo o llega a N.

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = 1/2$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1 - p)$.

Problema 3

Armijo, el colectivero de su barrio, le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar.

Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día él conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades.

$Pr[D = 0]$ =0.4 , $Pr[D = 1]$ =0.2 y $Pr[D \geq 2]$ =0.4.

Un auto es arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Dada la apariencia apacible de Armijo, los clientes abusan de su buena voluntad, por lo que se estima que con probabilidad p =0.7 maltratarán el automóvil durante su uso, por lo que nuestro atribulado colectivero deberá llevarlo a mantención el día siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de $10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar a nuestro querido Armijo se pide que responda:

1. Jutifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera
2. Modele la situacion descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.
3. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

A partir de las probabilidades estacionarias calculadas en la parte anterior, responda:

4. ¿Cuál es número esperado de arriendos diarios que realizaría esta empresa en estado estacionario?, ¿Cuál es el costo diario promedio por concepto de mantención? y ¿Cuál es el mínimo precio que Armijo debe cobrar por cada arriendo?.