Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs.: R. Epstein, P. Rey
Aux : C. Araya, J. Gacitúa, D. Wilson, R. Wolf

Pauta Control 1
30 de Agosto de 2007

Problema 1

Considere un juego donde dos jugadores lanzan sucesivamente un dado. El juego continúa hasta que en dos lanzamientos consecutivos se obtine el mismo número. Es decir, el juego se detiene cuando uno de los jugadores repite la última jugada de su adversario.

1. (0,5 puntos) Suponga que el segundo jugador ya ha realizado k lanzamientos ($k \geq 0$) y es el turno del primer jugador de realizar su $(k+1)$-ésimo lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad que el juego termine con este lanzamiento?

   La probabilidad que el juego termine con este lanzamiento es la probabilidad que el segundo jugador repita lo que acaba de sacar el primer jugador, por lo tanto es $1/6$.

2. (0,5 puntos) Suponga que el primer jugador ya ha realizado k lanzamientos ($k \geq 1$) y es el turno del segundo jugador de realizar su k-ésimo ¿cuál es la probabilidad que el juego termine con este lanzamiento?

   Por el mismo argumento del punto anterior, esta probabilidad es igual a $1/6$.

3. (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad que el juego termine *exactamente* con el n-ésimo lanzamiento?

   Para el primer lanzamiento, es decir $n = 1$, esta probabilidad es 0. Para cualquier otro n, esta probabibilidad es la probabilidad que el juego no haya parado hasta el lanzamiento n y en ese lanzamiento pare. Es decir, esta probabilidad es igual a

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}(1/6) = \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right).$$

4. (1 punto)¿Cuántos lanzamientos se realizan, en promedio, *en total* hasta que la partida termina?

   Si N es el número de lanzamientos que se realizan hasta terminar la partida, del punto anterior, podemos calcular

$$E[N] = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{5^{m-1}}{6^{m}}\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} m\left(\frac{5^{m-1}}{6^{m-1}}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = 1 + 6 = 7\,.$$

5. (1 punto) Calcule la probabilidad que el juego termine con un lanzamiento del primer jugador.

   Para calcular esto, partimos de la ecuación *"suma de probabilidades igual a 1"* para las probabilidades de terminar la partida en exactamente n lanzamientos y separamos las jugadas del primer jugador (n

impar) y las del segundo jugador (n impar):

$$\begin{aligned}
1 &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) \\
&= \textstyle\sum_{n\text{par}} \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) + \sum_{n\text{impar}} \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-2)}}{6^{2k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-1)}}{6^{2k}}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-2)}}{6^{2k-1}}\right) + \left(\frac{5}{6}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-2)}}{6^{2k-1}}\right) \\
&= \textstyle(1 + \left(\frac{5}{6}\right)) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-2)}}{6^{2k-1}}\right) \\
&= \textstyle\left(\frac{11}{6}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5^{2k-2)}}{6^{2k-1}}\right) \\
&= \textstyle\left(\frac{11}{6}\right) \sum_{n\text{par}} \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) .
\end{aligned}$$

por lo tanto, la probabilidad que la partida termine con un lanzamiento del segundo jugador es

$$\sum_{n\text{par}} \left(\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}\right) = \left(\frac{6}{11}\right)$$

y de que termine con un lanzamiento del primer jugador es $5/11$.

6. (1 punto) Calcule el valor esperado de la suma de los dados obtenidos por el primer jugador.

   Sea K el número de lanzamientos que realizará el primer jugador y d_k el valor obtenido por el jugador al lanzar su k-ésimo dado entonces el valor que queremos calcular es:

$$\begin{aligned}
E[\textstyle\sum_{k=1}^{K} d_k] &= \textstyle\sum_{k'=1}^{\infty} E[\left(\sum_{k=1}^{k'} d_k\right) P(K = k')] \\
&= \textstyle\sum_{k'=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{k'} E[d_k]\right) P(K = k') \\
&= \textstyle\sum_{k'=1}^{\infty} k'(7/2)P(K = k') \\
&= \textstyle(7/2) \sum_{k'=1}^{\infty} k' P(K = k') \\
&= (7/2)E[K] .
\end{aligned}$$

   El valor de $E[K]$ lo podemos obtener de

$$\begin{aligned}
E[K] &= E[K|\text{terminó con lanzamiento de primer jugador}]P(\text{terminó con lanzamiento de primer jugador}) \\
&\quad +E[K|\text{terminó con lanzamiento de segundo jugador}]P(\text{terminó con lanzamiento de segundo jugador}) \\
&= 4 \times (5/11) + (7/2) \times (6/11) \\
&= 62/11 .
\end{aligned}$$

   por lo tanto, el valor que queremos calcular es:

$$E[\sum_{k=1}^{K} d_k] = (7/2) \times (62/11) = 217/11 .$$

7. (1 punto) Calcule el número esperado de veces que aparece el número 2 en los resultados del primer jugador.

   Se D el número de dos que obtiene el primer jugador. De la misma manera que en el punto anterior, condicionamos en K el número de lanzamientos que realiza el primer jugador hasta que termina la partida. Lo que queremos calcular es:

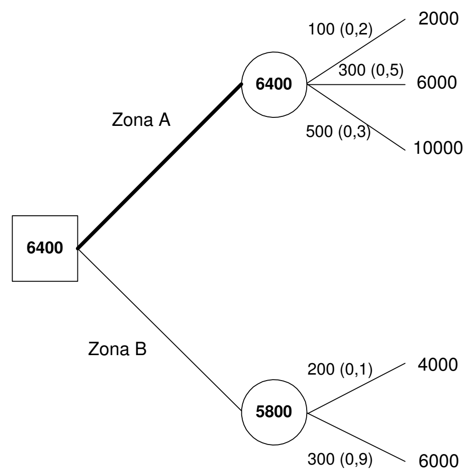
$$E[D] = \sum_{k=1}^{\infty} E[D|K = k]P(K = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (k/6)P(K = k) = (1/6)E[K] = (1/6) \times (62/11) = 62/33 .$$

Problema 2

Una empresa petrolera está considerando extender su área de explotación para los próximos 5 años. Para esto, está estudiando la adquisición de los derechos de explotacińn de una de dos zonas petroleras. Los totales que se podrán extraer en este período en cada zona no se conocen con exactitud pero se tienen estudios que indican lo siguiente: en la Zona A con probabilidad 0,2 se podrán extraer 100 mil barriles, con probabilidad 0,5 se podrán extraer 300 barriles y con probabilidad 0,3 se podrán extraer 500 mil barriles; mientras que para la Zona B lo que se sabe es que con probabilidad 0,1 se podrán extrar 200 mil barriles, mientras que con probabilidad 0,9 se extraerán 300 mil barriles. Para calcular los beneficios econnómicos, se estima un margen de 20 dólares por barril.

1. (2 puntos) Construya un árbol de decisiones que permita a la empresa determinar, dada la información con la que se cuenta cuál de ambas zonas es la que maximiza el beneficio esperado.

   El árbol asociado a este problema se muestra en la figura (los valores en las hojas están en miles de dólares):



Suponga que la empresa puede realizar una perforación exploratoria en la Zona A. La perforación entregará un resultado indicando si la disponibilidad de reservas es "Alta" o "Baja". Estos resultados tienen las siguientes consecuencias: si la respuesta es "Alta", hay una probabilidad de 0,8 que se puedan extraer 500 mil barriles, mientras que una probabilidad de 0,2 se podrán extraer 300 mil barriles y en ningún caso la extracción se reducirá a sólo 100 mil barriles. Por otra parte, si el resultado de la perforación es que es una zona de "bajas" reservas, la probabilidad de extraer 500 mil barriles se reduce a un 10 %.

2. (4 puntos) Construya un árbol de decisiones que permita determinar el precio máximo que estaría dispuesta la compañía a pagar por la perforación.

   Para plantear el árbol que se pide, se necesitan las probabilidades de que la perforación exploratoria prediga un nivel Alto o un nivel Bajo de reservas y las probabilidades de lo que efectivamente se podrá extraer condicionadas en los resultados de la perforación.

   Denotemos por A y B a los eventos "la perforación exploratoria dice *Alto*" y "la perforación exploratoria dice *Bajo*", respectivamente y por "100", "300" y "500", a los eventos "se extraen 100 mil barriles", "se extraen 300 mil barriles"y "se extraen 500 mil barriles", respectivamente.

   Las probabilidades que necesitamos y no tenemos (es decir, debemos calcular) son: $P(A)$, $P(B)$, $P(100|B)$ y $P(300|B)$. A la distribución de los resultados de la perforación, esto es $P(A)$ y $P(B)$ las obtenemos resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} P(500) &= P(500|A)P(A) + P(500|B)P(B) \\ 1 &= P(A) + P(B)\,, \end{aligned}$$

es decir,

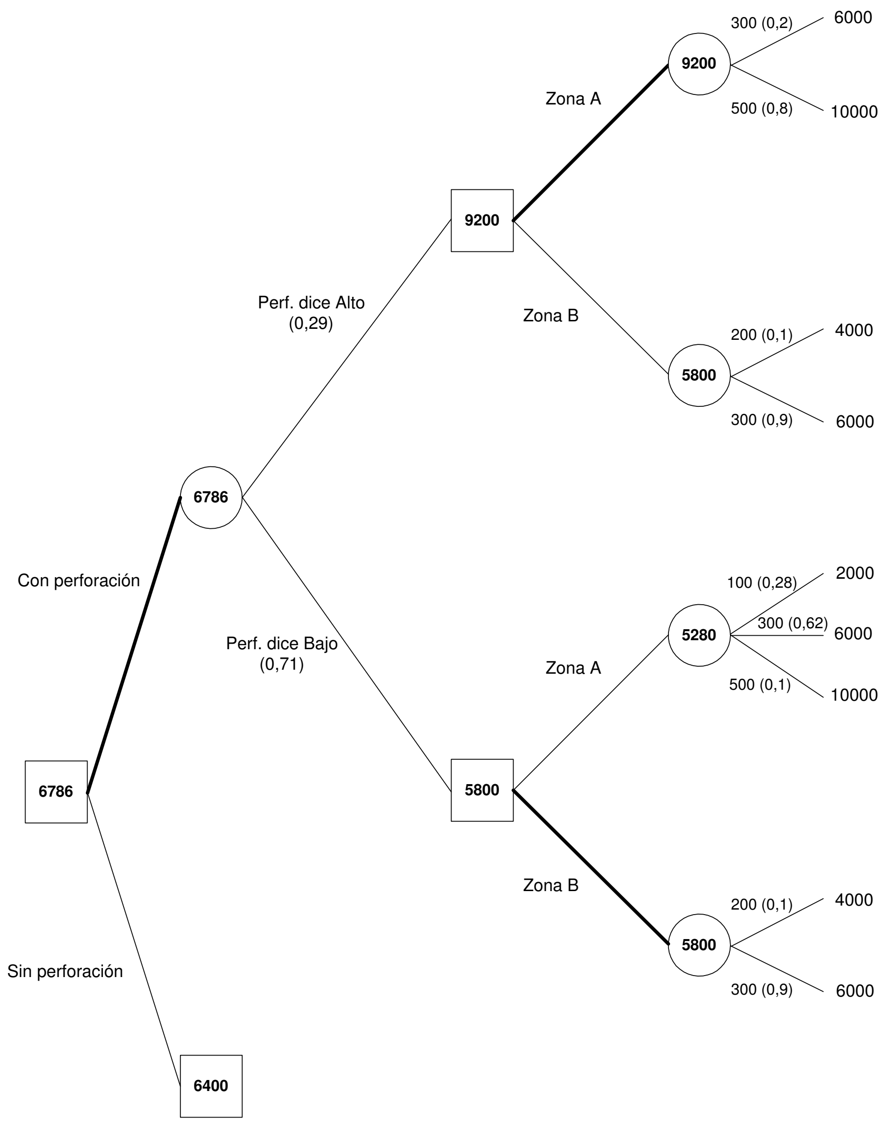
$$\begin{aligned} 0{,}3 &= 0{,}8P(A) + 0{,}1P(B) \\ 1 &= P(A) + P(B)\,, \end{aligned}$$

que tiene como solución: $P(A) = \frac{0{,}3-0{,}1}{0{,}8-0{,}1} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = 0{,}29$ y $P(B) = 0{,}71$. A partir de estos resultados podemos calcular las probabilidades restantes:

$$P(100|B) = \frac{P(100) - P(100|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}71} = 0{,}28\,,$$

y $P(300|B) = 1 - P(500|B) - P(300|B) = 0{,}62$.

Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura



De los valores finales, podemos calcular que lo máximo que estaría dispuesto a pagar la empresa por la perforación exploratoria es $6786 - 6400 = 386$ miles de dólares.

Problema 3

Una prestigiosa aerolínea ofrece un vuelo que saldrá en D días más y pretende obtener de él la mayor cantidad de utilidades. Dependiendo del precio del pasaje y de la cantidad de días que quedan para el vuelo, la demanda por pasajes varía. La probabilidad de que se demanden j pasajes dado un precio p, el día d es $K_{j,p,d}$, para $d \in \{1, .., D\}$.

Para los pasajeros que acceden a los cupos del avión, siempre decidirán reservarla para pagar en un día futuro. La reserva dura 2 días, para luego caducar y dejar el ticket disponible. Una reserva que lleva un día de antigüedad pasará a ser comprada con probabilidad r_1; la que lleva dos días r_2. Los clientes nunca cancelan reservaciones. El precio de compra siempre será el precio vigente a la fecha de compra.

Para maximizar los ingresos por pasajes, no siempre se ofrece la totalidad de asientos disponibles, porque es sabido que al acercarse la fecha del vuelo se pueden vender pasajes más caros. Es una práctica habitual retener una cierta cantidad de pasajes, para cada día.

Plantee un modelo de programación dinámica estocástica para ayudar a la toma de decisiones de la compañía aérea. Se desea conocer la política diaria de precio para el horizonte de D días, y la cantidad de boletos puestos a disposición de los compradores en cada día (no hay sobreventa). Al comienzo del primer día de ofertas hay A asientos disponibles, y no hay reservas pasadas. Al momento de salir el vuelo, los pasajes tienen precio nulo.

Pauta

1. Variables de Decision:
   - x_d: número de pasajes a ofrecer a comienzos del día d.
   - P_d: precio del pasaje para el día d.
2. Variables de Estado
   - S_d: número total de pasajes disponibles al principio de d.
   - S_d^1: número de pasajes con 1 día de reserva al comienzo del día d.
   - S_d^2: número de pasajes con 2 días de reserva al comienzo del día d.
3. Variables Aleatorias
   - N_d: número de pasajes demandados a comienzos de d, al tener precio p.

     $$P(N_d = j) = K_{j,p,d}$$

   - N_d^1: número de pasajes comprados con 1 día de reserva.

     $$N_d^1 \rightsquigarrow B(S_d^1, r_1)$$

   - N_d^2: número de pasajes comprados con 2 días de reserva.

     $$N_d^2 \rightsquigarrow B(S_d^2, r_2)$$

4. Función de Recurrencia
   - $S_{d+1} = S_d - min\{x_d, N_d\} + \left(S_d^2 - N_d^2\right)$
   - $S_{d+1}^1 = min\{x_d, N_d\}$
   - $S_{d+1}^2 = S_d^1 - N_d^1$

5. Función de Beneficios

$$\begin{aligned}
V_d(x_d, S_d, S_d^1, S_d^2) &= E\left[\textsf{Utilidades en d} + V_{d+1}^*\right] \\
&= E\left[\textsf{Utilidades en d}\right] + E\left[V_{d+1}^*\right] \\
&= P_d \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} min\left\{x_d, j\right\} \cdot K_{j,P_d,d} + S_d^1 \cdot *r_d^1 + S_d^2 \cdot r_d^2\right) + \\
&\quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{S_d^2} \sum_{l=0}^{S_d^1} V_{d+1}^*(S_d - min\left\{x_d, j\right\} + S_d^2 - k, \\
&\quad min\left\{x_d, j\right\}, S_d^1 - l) \cdot K_{j,P_d,d} \cdot P(N_d^2 = k) \cdot P(N_d^1 = l)
\end{aligned}$$

Definimos entonces

$$V_d^* = max_{x_d \in \{0,..,S_d\}}\left(V_d(x_d, S_d, S_d^1, S_d^2)\right)$$

6. Condiciones de Borde

- $S_1 = A$
- $S_1^1 = S_1^2 = 0$
- $V_{D+1}^* = 0$