

Clase auxiliar: Martes 11 de septiembre de 2007

Problema 1

Un animal salvaje puede conseguir su alimento en tres sectores de su hábitat. Por simplicidad, los llamamos SECTOR 1, SECTOR 2 y SECTOR 3. Se sabe que el animal permanecerá en el sector que se encuentre mientras consiga alimento. Si un día no consigue alimento en el sector que se encuentra, se dirigirá a otro. Por observaciones realizadas, se ha comprobado que siempre que el animal se desplaza, encuentra alimento en el nuevo sector al que se dirige. Por otro lado, se sabe que si se encuentra en el sector i , encontrará alimento, y por lo tanto permanecerá un día más allí con probabilidad p_i . Estas probabilidades son conocidas y toman los valores $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,5$. Además se sabe que, cuando se desplaza, lo hace del sector 1 al sector 2, de éste al sector 3 y del sector 3 al sector 1.

1. (2,0 pts.) Modele el comportamiento del animal como una cadena de Markov en tiempo discreto. Defina claramente los estados y determine las probabilidades de transición.
2. Suponga que un día cualquiera, el animal se encuentra en el sector 1.
 - a) (0,5 pts.) Calcule la probabilidad que en 3 días más el animal esté en el sector 3.
 - b) (1,0 pts.) Calcule la probabilidad que la primera vez que el animal llegue al sector 3 suceda dentro de exactamente 3 días.
3. (2,0 pts.) Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y calcúlelas.
4. (0,5 pts.) Calcule la fracción de días que el animal debe desplazarse para conseguir alimento.

Problema 2

(*) Un individuo posee r paraguas, que usa para ir caminando de su casa a la oficina y viceversa. Si él está en su casa al comienzo del día y está lloviendo, entonces, si al menos hay un paragua en la casa, él tomará uno para ir a su oficina. Análogamente, si él está en su oficina, tomará uno para ir a su casa. Si no está lloviendo no toma ningún paragua. Suponga, que independiente del pasado, llueve al comienzo (final) del día con probabilidad p .

- a) Defina una cadena de Markov de $r + 1$ estados que ayude a determinar que proporción del tiempo el individuo se moja.
Hint: Defina los estados de la cadena como el número de paraguas que tiene la persona en el lugar en que se encuentra (ya sea su casa o la oficina). Suponga que existe una transición cada vez que el individuo cambia de lugar (de la casa a la oficina o viceversa)
- b) Encuentre las probabilidades estacionarias.
- c) ¿Qué fracción del tiempo (porcentaje de caminatas) el individuo se moja?

Problema 3

En un pequeño centro hospitalario se tiene la urgencia de instalar equipos nuevos. Estos equipos son muy costosos y se deben manejar con mucho cuidado por lo que se necesita que el establecimiento esté vacío al momento de la instalación. El problema es que actualmente se tiene M pacientes en el centro (y los equipos no llegarán hasta que no haya nadie).

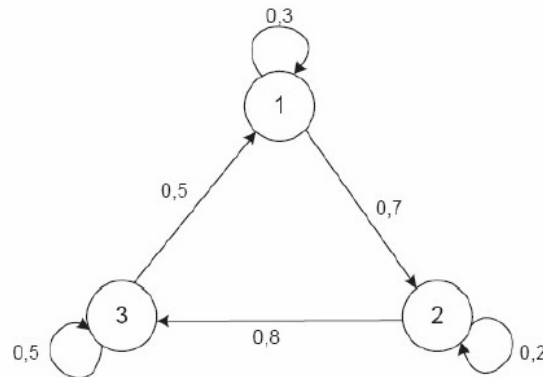
Cada mañana un doctor evalúa la condición de los pacientes para ver si son dados de alta. Se ha determinado que cada paciente tiene una probabilidad p de estar rehabilitado y salir del centro y una probabilidad $(1-p)$ de seguir internado, independiente de lo que ocurra con los demás pacientes. Nadie puede ingresar al centro hasta después de instalados los equipos.

1. Muestre que el sistema descrito puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo discreto, dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.
2. Si el sistema tiene inicialmente M pacientes, ¿Cuál es la probabilidad que algún día tenga $M-1$?, ¿Cuál es la probabilidad que algún día se puedan instalar los equipos? Encuentre estas probabilidades y fundamente adecuadamente sus respuestas.

Pauta auxiliar: Martes 11 de septiembre de 2007

Problema 1

- El comportamiento del animal puede ser modelado con la cadena que se muestra en la figura. El estado i corresponde a un día que el animal se alimenta en el sector i .



- Suponemos que el animal está en el sector 1.

a) La probabilidad que en tres días más esté en el sector 3 puede ser calculada como $(P^3)_{13}$. Como

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,307 & 0,133 & 0,560 \\ 0,400 & 0,288 & 0,312 \\ 0,245 & 0,350 & 0,405 \end{bmatrix}$$

la probabilidad solicitada es igual a 0,56.

b) Para llegar exactamente en tres transiciones por primera vez del estado 1 al estado 3 hay que realizar una transición del estado 1 al 2, una del estado 2 al 3 y haber permanecido por una transición en el estado 1 o en el estado 2. Por lo tanto, la probabilidad que queremos calcular es igual a $(0,3 + 0,2) \times 0,7 \times 0,8 = 0,28$.

c) La cadena del punto 1. admite probabilidades estacionarias ya que es finita y ergódica. Sus probabilidades estacionarias se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,3\pi_1 + 0,7\pi_2 \\ \pi_2 &= 0,2\pi_2 + 0,8\pi_3 \\ \pi_3 &= 0,5\pi_1 + 0,5\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

Las probabilidades estacionarias son iguales a:

$$\pi_1 = 40/131 = 0,30$$

$$\pi_2 = 35/131 = 0,27$$

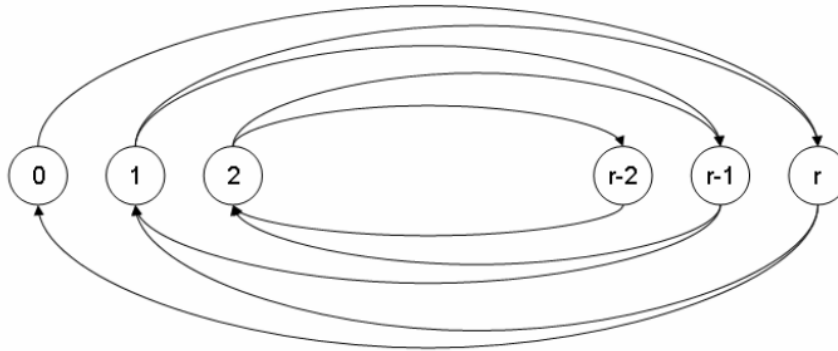
$$\pi_3 = 56/131 = 0,43$$

d) La fracción de días que el animal debe desplazarse es igual a

$$\sum_{i=1}^3 \pi_i(1 - p_i) = 0,3 \times 0,7 + 0,27 \times 0,8 + 0,43 \times 0,5 = 0,21 + 0,216 + 0,215 = 0,641 .$$

Problema 2

- a) Para definir la cadena debemos especificar los estados de la misma y las probabilidades de transición entre cada par de estado (elementos de la matriz de transición). Utilizando la indicación del enunciado la cadena es la que se muestra en la figura 10.



Entonces, del dibujo se ve que:

$$P[i \text{ paraguas}, j \text{ paraguas}] = \begin{cases} p & \text{si } j = r - i + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = r - i \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \forall i > 0$$

La definición de la matriz de transición se completa con:

$$P[[0 \text{ paraguas}, j \text{ paraguas}] = \begin{cases} 1 & \text{si } j = r \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- b) Las ecuaciones que nos permiten encontrar las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena ergódica) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \pi_r \cdot (1 - p) \\
 \pi_1 &= \pi_r \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-1} \\
 \pi_2 &= \pi_{r-1} \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-2} \\
 \pi_3 &= \pi_{r-2} \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-3} \\
 &\vdots \\
 \pi_{r-1} &= \pi_2 \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_1 \\
 \pi_r &= \pi_1 \cdot p + \pi_0 \\
 \sum_{i=0}^r \pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

Utilizando las r primeras ecuaciones descubrimos que:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 \dots = \pi_r = \frac{\pi_0}{(1 - p)} = \pi$$

Si utilizamos esto en la última ecuación llegamos a que:

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot (r + 1 - p) &= 1 \\
 \pi &= \frac{1}{r + 1 - p} \\
 \pi_0 &= \frac{1 - p}{r + 1 - p}
 \end{aligned}$$

- c) Se mojará sólo en las ocasiones que esté en un lugar donde no hayan paraguas (fracción π_0 de los casos) y le toque la mala suerte que llueva (con probabilidad p). Entonces el resultado es:

$$\text{fracción que se moja} = \frac{p(1 - p)}{r + 1 - p}$$

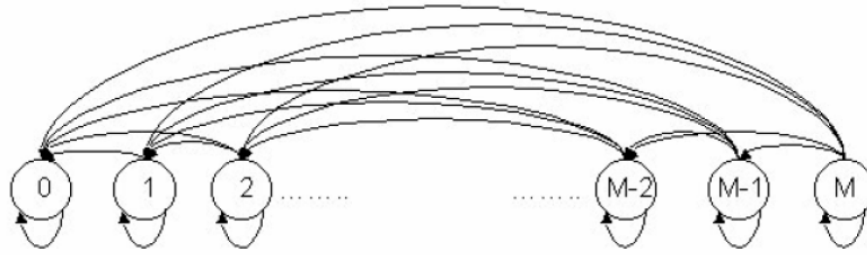
Problema 3

1. La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si me defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

El estado i sería la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, para todo i en $\{0, \dots, M\}$.

Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente fórmula:

$$P(i, j) = P(\text{ir del estado } i \text{ al estado } j) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} (1-p)^j & \text{si } M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$



Existen $M + 1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuesta cada una por uno de los M estados restantes. Recuerden que una clase está compuesta por todos los estados comunicados entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.

2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M - 1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por } M-1 \text{ en } i \text{ transiciones})$$

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en } M \text{ por } i-1 \text{ transiciones}) \cdot P(M, M-1)$$

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1}$$

$$P(\text{Pasar por el estado } M-1) = \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1 - (1-p)^M}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergódica, sé que en el largo plazo con seguridad estaré en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente está compuesta por el estado 0, es que se puede decir con seguridad (Probabilidad = 1) que en el largo plazo el sistema llegaría al estado 0 y por lo tanto se podrán instalar los equipos.