



Solución Auxiliar Viernes 7 de Septiembre Procesos de Poisson

Problema 1

1. Como los clientes llegan según un proceso poisson homogéneo, se tiene la propiedad de incrementos independientes, la que sostiene que la probabilidad de vender el numero esperado por el gerente luego del segundo día es independiente de lo que haya vendido anteriormente. Luego el gerente no está en lo cierto.
- 2.

$$\begin{aligned}
 P[N_A(6) = k | N_T(6) = M] &= \frac{P[N_A(6) = k \wedge N_T(6) = M]}{P[N_T(6) = M]} \\
 &= \frac{P[N_A(6) = k] \cdot P[N_B(6) = M - k]}{\frac{((\lambda_A + \lambda_B) \cdot 6)^M \cdot e^{-(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 6}}{M!}} \\
 &= \frac{\frac{(\lambda_A \cdot 6)^k \cdot e^{-\lambda_A \cdot 6}}{k!} \cdot \frac{(\lambda_B \cdot 6)^{M-k} \cdot e^{-\lambda_B \cdot 6}}{(M-k)!}}{\frac{((\lambda_A + \lambda_B) \cdot 6)^M \cdot e^{-(\lambda_A + \lambda_B) \cdot 6}}{M!}} \\
 &= \binom{M}{k} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^{M-k}
 \end{aligned}$$

También era posible argumentar a priori que condicionado al número de eventos, estos se distribuyen uniformemente en las 6 horas. Así, bastaba ver que la probabilidad de que k fueran Tipo A, corresponde a las distintas configuraciones de dichos eventos en las 6 horas.

3. a) Para ello necesito que hayan llegando k clientes de tipo B antes del $Q_A - 1$ cliente de tipo A y luego que llegue el último cliente de tipo A. La probabilidad b de que un cliente de tipo B llegue antes que uno de tipo A equivale a $\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$. Como las k llegadas de clientes tipo B pueden tener distinto orden dentro de las $Q_A - 1$ llegadas de clientes tipo A, lo pedido es:

$$\rho_k = \binom{Q_A - 1 + k}{k} b^k \cdot (1 - b)^{Q_A - 1} \cdot (1 - b)$$

- b) Debo sumar (unir) los valores de k , lo que queda:

$$\sum_{k=1}^{Q_B - 1} \rho_k$$

4.

$$\begin{aligned}
E[\text{Ingresos}] &= E[\text{Ingresos Clientes A}] + E[\text{Ingresos Clientes B}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Ingresos Clientes A} | N_A(T) = k] \cdot \frac{(\lambda_A)^k e^{-\lambda_A}}{k!} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Ingresos Clientes B} | N_B(T) = k] \cdot \frac{(\lambda_B)^k e^{-\lambda_B}}{k!}
\end{aligned}$$

Para ingresos clientes tipo A: Si $k \leq Q_A$:

$$E[\text{Ingresos Clase A} | N_A(T) = k] = C \cdot k$$

Si $k > Q_A$:

$$E[\text{Ingresos Clase A} | N_A(T) = k] = C \cdot Q_A$$

Para ingresos clientes tipo B: Si $k \leq Q_B$:

$$E[\text{Ingresos Clase B} | N_B(T) = k] = \sum_{i=1}^k i \cdot B_i$$

Si $k > Q_B$:

$$E[\text{Ingresos Clase B} | N_B(T) = k] = \sum_{i=1}^{Q_B} i \cdot B_i$$

En esta solución, $N_A(t)$ y $N_B(t)$ son definidos como el número de personas (de tipo A y B resp.) que han llegado a la tienda en t y no como el número de personas que se llevan la camisa en t .

5. Llamemos $P[n]$ a la probabilidad de que hayan n clientes en la fila justo al finalizar la atención del cliente tipo A. Condicionando en la duración de la atención de este cliente, se tiene:

$$P[n] = \int_0^{\infty} P[n | \text{atención dura } t] \mu e^{-t\mu} dt$$

Además, ya que hay 1 cliente esperando, para que hayan n clientes en la fila al finalizar la atención, deben llegar $n - 1$ clientes durante la misma. Así:

$$P[n | \text{atención dura } t] = \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B)} (t(\lambda_A + \lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P[n] &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B)} (t(\lambda_A + \lambda_B))^{n-1}}{(n-1)!} \mu e^{-t\mu} dt \\
&= \frac{(\lambda_A + \lambda_B)^{n-1} \mu}{(\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\lambda_A + \lambda_B + \mu)} (\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&= \frac{(\lambda_A + \lambda_B)^{n-1} \mu}{(\lambda_A + \lambda_B + \mu)^n}
\end{aligned}$$

Ya que dentro de la integral queda la densidad de una distribución gamma de parámetros n y $\lambda_A + \lambda_B + \mu$.

6. Sea t_i el instante de la llegada del i -ésimo cliente antes de que la promotora entregue los obsequios.

Luego la esperanza pedida corresponde a: $E[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i)]$

Dado que esta esperanza depende de la variable aleatoria $N(t)$ que representa la cantidad de personas que llegan hasta el instante t , se debe condicionar con respecto a esta variable y luego descondicionar. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} E[\sum_i^{N(t)} (t - t_i)] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - t_i) / N(t) = n] \cdot P[N(t) = n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[E[\sum_{i=1}^{N(t)} t / N(t) = n] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} t_i / N(t) = n] \right] \cdot P[N(t) = n] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N(t)} E[t / N(t) = n] - \sum_{i=1}^{N(t)} E[t_i / N(t) = n] \right] \cdot P[N(t) = n] \end{aligned}$$

En la expresión anterior t es una constante por lo que $E[t] = t$. Por otro lado los tiempos t_i se distribuyen uniformes en el intervalo $[0, t]$ cuya esperanza es $E[t_i] = \frac{t}{2}$. Finalmente el término $P[N(t) = n]$ corresponde a la definición de un proceso de Poisson.

$$E[\sum_i^{N(t)} (t - t_i)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[nt - \frac{nt}{2} \right] \cdot \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

Problema 2

El problema también puede ser visto como una división de un proceso de Poisson. Sean:

- $N(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas desde 0 hasta t .
- $N_n(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas sin ser socios desde 0 hasta t .
- $N_m(t)$ = número de personas que han llegado a comprar entradas siendo socios desde 0 hasta t .

1.

$$\begin{aligned} P(N_m(6) = i | N(6) = n) &= \frac{P(N_m(6) = i \wedge N(6) = n)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{P(N_m(6) = i) P(N_n(6) = n - i)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{\frac{(0,25\lambda 6)^i e^{-0,25\lambda 6}}{i!} \frac{(0,75\lambda 6)^{n-i} e^{-0,75\lambda 6}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}} \\ &= \binom{n}{i} 0,25^i 0,75^{n-i} \end{aligned}$$

2. Distinguimos 3 casos:

$$\blacksquare \text{ Si } n < 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = \frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}$$

- Si $n = 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = \sum_{k=200}^{\infty} \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$
- Si $n > 200 \Rightarrow P(\text{vender } n) = 0$

3. Sea u = utilidad de una función. Entonces:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E(u|N(6) = k)P(N(6) = k)$$

pero:

- Si $k \leq 199$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 0,25^i 0,75^{n-i} ((k-i)p + i0,8p)$$

- si $k \geq 200$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=0}^{200} \binom{200}{i} 0,25^i 0,75^{200-i} ((200-i)p + i0,8p)$$

Como $P(N(6) = k) = \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$, sólo basta reemplazar.

4. Sean:

R_i = Instante de la llegada i-ésima de un cliente normal.
 S_j = Instante de la llegada j-ésima de un "socio".

Notar que conocemos las funciones de probabilidad de $R_i \sim \text{Gamma}(i, 0,75\lambda)$
y de $S_j \sim \text{Gamma}(j, 0,25\lambda)$.

Para que se vendan 50 entradas con descuento deben pasar 2 cosas:

- Que lleguen al menos 50 personas con tarjeta en las 8 horas que está abierta la boletería
- Que el cliente N^{50} que sea socio llegue antes que se cope la capacidad del cine. Esto ocurre si dicho cliente llega antes que el 150-ésimo cliente normal.

Entonces debemos calcular:

$$\begin{aligned} P(S_{50} \leq R_{151} \wedge S_{50} \leq 6) &= P(S_{50} \leq \min\{R_{151}, 6\}) = \int_0^{\infty} P(S_{50} \leq \min\{r, 6\}) f_{R_{151}}(r) dr \\ &= \int_0^6 P(S_{50} \leq r) f_{R_{151}}(r) dr + \int_6^{\infty} P(S_{50} \leq 6) f_{R_{151}}(r) dr \\ &= \int_0^6 \int_0^r f_{S_{50}}(s) ds \cdot f_{R_{151}}(r) dr + \int_6^{\infty} \int_0^6 f_{S_{50}}(s) ds \cdot \int_6^{\infty} f_{R_{151}}(r) dr \end{aligned}$$