



Solución Clase Auxiliar 5 de Septiembre, 2007

Primero, demostraremos dos resultados útiles para trabajar problemas de procesos de Poisson.

División de procesos de Poisson:

Sea $N(t)$ un proceso de Poisson homogéneo, de tasa λ . Este proceso entrega eventos catalogados de tipo A o tipo B. Sea p la probabilidad que un evento sea tipo A.

Tendremos entonces,

$N(t)$ = Número total de eventos hasta tiempo t

$N_A(t)$ = Número total de eventos tipo A que llegan hasta tiempo t

$N_B(t)$ = Número total de eventos tipo B que llegan hasta tiempo t

Calculamos la distribución de $N_A(t)$, condicionando sobre $N(t)$.

$$\begin{aligned} P[N_A(t) = n] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \\ &= \frac{+^n e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p) \end{aligned}$$

Se procede análogamente para $N_B(t)$. Se puede demostrar que los procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$ son independientes.

Distribución condicional de los tiempos de llegada:

X_1 = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de $[0, t]$ hay una llegada

$$\begin{aligned} P[X_1 \leq s / N(t) = 1] &= \frac{P[X_1 \leq s \wedge N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \quad 0 \leq s \leq t \\ &= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo $[0, t]$ el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución $U[0, t]$.

Problema 1

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, \dots, x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. En este problema, buscamos $P(R(t) \geq N)$

Sea Y_i el tiempo transcurrido entre que terminamos de festejar el gol (i-1) y llega el i-ésimo. De esta manera tenemos que:

- $Y_1 \rightarrow \exp(\lambda)$
- $Y_i \rightarrow \exp(\lambda) \forall i \neq 1$

Sea S_N el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_N = \sum_{i=1}^N Y_i + (N-1)B$$

Para cualquier proceso de conteo, se cumple

$$P(S_N \leq t) = P(R(t) \geq N)$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} P(R(t) \geq N) &= P\left(\sum_{i=1}^N Y_i + (N-1)B \leq t\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^N Y_i \leq t - (N-1)B\right) \end{aligned}$$

Como Y_i son exponenciales, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Y_i &\rightsquigarrow \text{Gamma}(N, \lambda) \\ \Rightarrow P(R(T) \geq N) &= \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Problema 2

1. Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en $t=0$ (7:00 am) y termina en $t=T$ (7:00am del día siguiente) De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más N pacientes graves}] = \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde λ_1 es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N | N \in \{0, 1, \dots\} \quad \wedge \quad \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0,95 \right\}$$

2. El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llego. Si llego antes de las $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llego después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llego en el instante X ($0 \leq X \leq 60$) Entonces:

$$P[\text{Muerto} | \text{Llego en } X] = 1_{X \leq 5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto, ocupamos el resultado conocido que la distribución condicional de las llegadas de poisson hasta un instante T se distribuyen uniformemente entre 0 y T . Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \int_0^5 1 \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\ &= \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

3. Esto es básicamente es la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde λ_l es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y λ_g la tasa de llegada de pacientes graves. Considerando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que buscamos, P , es:

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}^5 \cdot \frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l}^5$$

4. Por la pérdida de memoria de la exponencial el mundo "comienza" cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en si un proceso de poisson de tasa $\lambda_g + \lambda_l$, y por lo tanto Y , el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_g + \lambda_l$. Entonces el tiempo máximo, T^* , de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0,95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{\ln(0,95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

Problema 3

1. Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
 P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(10) = n \wedge N(10) = 1000]}{P[N(10) = 1000]} \\
 &= \frac{P[N_A(10) = n] \cdot P[N_B(10) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
 &= \frac{\frac{e^{-\lambda_A \cdot 10} (\lambda_A \cdot 10)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \cdot 10} (\lambda_B \cdot 10)^{1000-n}}{(1000-n)!}}{\frac{e^{-\lambda \cdot 10} (\lambda \cdot 10)^{1000}}{1000!}} \\
 &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n \left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000-n} \\
 &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato A es p , tenemos que:

$$P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot p^n (1-p)^{1000-n} = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0$$

2. Llamemos N_A^4 al número de votantes del candidato A que llegan en las primeras 4 horas de votación.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
 P[N_A^4 = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(4) = n \wedge N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
 &= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^*(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
 \text{Donde } N^* &\rightsquigarrow \text{Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda \\
 &= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}} \\
 &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000-n} \\
 &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}
 \end{aligned}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes $N_1(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$ y $N_2(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\frac{\lambda}{q})$ se tendrá que $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$, por lo que es posible ajustar “el reloj” del proceso $N_B(4)$ para sumarlo con $N(6)$.

Alternativa 2:

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato A , dado que llegó en las primeras 10 será $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n / N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}$$

Problema 4

1. Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda_D + \lambda_A)$ en 1 mes.
2. Esta es la típica pregunta tipo “¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?”. Si T_D = tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y T_A = tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \rightsquigarrow \exp(\lambda_D)$ y $T_A \rightsquigarrow \exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

3. Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en meses:

$$\begin{aligned} E[\text{N fallas Domiciliarias}/T_r = t] &= \lambda_D \cdot \frac{t}{24} \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \int_0^\infty \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] = \frac{\lambda_D \cdot T}{24} \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Alumbrado público}] = \frac{\lambda_A \cdot T}{24} \end{aligned}$$

4. En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\begin{aligned} \min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k - R)] \cdot P(N_A = k) \right\} \\ \min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k - R) \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!} \right\} \end{aligned}$$

Dudas y/o errores:
Jaime Gacitua C.
jgacitua@ing.uchile.cl